UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

61. BAND 4. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 28. FEBRUAR 1955)

QA1
M88
v.61
no.4

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1955

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

61. Band **Inhalt** 4. (Schluß-)Heft

Seite

Schöneborn, H., Über eine Klasse von topologischen Gruppen 357
Krickeberg, K., Charakterisierung oberer und unterer Integrale durch Additivitäts- und Mittelwerteigenschaften 374
Ragab, F. M., New integrals involving Bessel-functions 386
Lorch, E. R., On the Volume of Smooth Convex Bodies in Hilbert Space 391
Jacobs, K., Periodizitätseigenschaften beschränkter Gruppen im Hilbertschen Raum 408
Kneser, M., Ein Satz über abelsche Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen 429
Epheser, H., Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben mit gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung 435
Koecher, M., Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. II 455
Stoll, W., Über meromorphe Modifikationen. II 467
Salzmann, H., Über den Zusammenhang in topologischen projektiven Ebenen . . 489

notaec.
QA1
M88
v.61
no.4

SCHÖNEBORN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 357—373 (1955)

Über eine Klasse von topologischen Gruppen.

Von
HEINZ SCHÖNEBORN.

Gegenstand der nachfolgenden Untersuchungen sind diejenigen (nicht notwendig kommutativen) topologischen Gruppen, deren Topologie durch ein aus *Normalteilern* bestehendes Fundamentalsystem von Umgebungen des neutralen Elementes definiert wird *(Normalteilertopologie; normalteilertopologische Gruppen)*. Derartige Gruppen wurden im abelschen Falle bereits 1925 von H. PRÜFER [*9*] im Rahmen seiner Untersuchungen über abelsche Gruppen betrachtet. Später zeigte W. KRULL [*6*], daß die Galoisgruppen unendlicher algebraischer Körpererweiterungen kompakte Gruppen mit einer Normalteilertopologie sind (vgl. hierzu z. B. auch KAWADA [*5*]) und untersuchte die Prüferschen abelschen topologischen Gruppen unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen („Separabilität", lineare Kompaktheit) [*7*], wobei sich außerdem enge Beziehungen zu den Resultaten und Problemen der PONTRJAGINschen Dualitätstheorie ergaben. — In neuerer Zeit wurden die auf PRÜFER und KRULL zurückgehenden Begriffsbildungen und Resultate für den Fall *abelscher* Gruppen in verschiedener Richtung verallgemeinert und ausgebaut unter anderem von VILENKIN [*12*], ZELINSKY [*13*], KAPLANSKY [*4*] und dem Verfasser [*10*] (vgl. auch eine demnächst in den Hamburger Abhandlungen erscheinende Arbeit über „Prüfersche Gruppen" von H. LEPTIN), während nichtkommutative Gruppen mit einer Normalteilertopologie von M. HALL jr. [*3*] unter spezielleren Gesichtspunkten betrachtet worden sind.

Das Ziel der vorliegenden Note ist die Untersuchung einiger Fragen aus der Theorie der nichtkommutativen Gruppen mit einer Normalteilertopologie unter Gesichtspunkten, wie sie für den Fall abelscher Gruppen vom Verfasser in einer früheren Arbeit [*10*] entwickelt worden sind. Dabei zeigt sich insbesondere, daß bei den topologischen Gruppen mit einer Normalteilertopologie — ebenso wie im abelschen Falle — außergewöhnlich enge Beziehungen zwischen der topologischen und der gruppentheoretischen Struktur bestehen in dem Sinne, daß einerseits den meisten der auftretenden topologischen Eigenschaften eine rein gruppentheoretische Bedeutung zukommt und andererseits sich viele Begriffsbildungen und Fragestellungen der reinen Gruppentheorie auf den Fall der Gruppen mit Normalteilertopologie in zwangloser und natürlicher Weise übertragen lassen. Dadurch wird ein gewisses Interesse auch der reinen Gruppentheorie an der Untersuchung der topologischen Gruppen mit Normalteilertopologie begründet[1]), während umgekehrt viele sonst nur mit

[1]) Vgl. hierzu die oben zitierte Arbeit von HALL [*3*], in welcher ein Satz von MAGNUS über die höheren Kommutatorgruppen gewöhnlicher freier Gruppen mit Hilfsmitteln der Theorie der normalteilertopologischen Gruppen bewiesen wird.

tiefliegenden topologischen Betrachtungen angreifbare Problemstellungen aus der allgemeinen Theorie der topologischen Gruppen im vorliegenden Falle eine besonders durchsichtige und rein gruppentheoretisch sinnvolle Form annehmen[2]).

Inhaltsübersicht. In Nr. **1** der vorliegenden Arbeit werden die später benötigten Grundbegriffe und Eigenschaften resümiert. Nr. **2** enthält Untersuchungen über topologische Eigenschaften der natürlichen Abbildungen normalteilertopologischer Gruppen auf Restklassengruppen und Nebenscharenräume. In Nr. **3** werden einige bekannte Begriffsbildungen der Gruppentheorie, insbesondere die Begriffe der p-Gruppe und der p-Sylowgruppe in geeigneter Form auf unseren Fall übertragen und eine Verallgemeinerung des Sylowschen Satzes bewiesen. Der für das folgende grundlegende Begriff der linearen Kompaktheit wird in Nr. **4** definiert und auf seine wichtigsten Eigenschaften hin untersucht. Insbesondere ergibt sich, daß die Eigenschaft der linearen Kompaktheit einer normalteilertopologischen Gruppe im wesentlichen äquivalent ist zur linearen Kompaktheit der *diskreten* Restklassengruppen nach den die Topologie der Gruppe definierenden Umgebungsnormalteilern. Die sich daraus ergebende Frage nach einer gruppentheoretischen Kennzeichnung der Umgebungsnormalteiler einer linear-kompakten Gruppe führt zunächst auf den in Nr. **5** behandelten Problemkreis: Aus der Theorie der normalteilertopologischen *abelschen* Gruppen ist bekannt ([*10*] Satz 15), daß die Umgebungsnormalteiler N_ν einer abelschen linear-kompakten Gruppe die folgenden einander äquivalenten Eigenschaften besitzen: 1. Ist N_ν Durchschnitt eines Systems von Obergruppen, so gibt es unter diesen bereits endlich viele, deren Durchschnitt N_ν ist. 2. Die Restklassengruppen der Gesamtgruppe nach den N_ν genügen der Minimalbedingung für Untergruppen. Im Falle nichtabelscher Gruppen führt die Übertragung der ersten der obigen Eigenschaften zu dem Begriff des G-Normalteilers, die der zweiten zu dem des großen Normalteilers und während die Äquivalenz beider im abelschen Falle leicht zu beweisen ist, stellt sich für nichtabelsche Gruppen die (rein gruppentheoretische) Frage, ob jeder G-Normalteiler ein großer Normalteiler ist. Als Beitrag für die Beantwortung dieser — auch an sich interessanten — Frage werden in Nr. **5** Bedingungen für eine bejahende Antwort gegeben. Der für abelsche Gruppen bewiesene Satz, daß die obigen Eigenschaften 1. bzw. 2. der Umgebungsnormalteiler einer Gruppe für ihre lineare Kompaktheit im wesentlichen charakteristisch sind, wird in Nr. **6** mit Hilfe eines Satzes von ČERNIKOV auf (in dem hier definierten verallgemeinerten Sinne) lokal auflösbare Gruppen verallgemeinert. Ebenso wird ein Resultat über die Darstellung linear-kompakter normalteilertopologischer spezieller Gruppen als topologisches direktes Produkt von p-Sylowgruppen hergeleitet.

1. Im folgenden werden durchwegs (nicht notwendig kommutative) additiv geschriebene topologische Gruppen A betrachtet, deren Topologie durch ein aus Normalteilern N_ν von A mit $\cap N_\nu = 0$ bestehendes System von offenen

[2]) Siehe z.B. die von KAPLANSKI [*4*] und vom Verfasser [*10*] durchgeführte Untersuchung zur PONTRJAGINschen Dualitätstheorie.

Nullumgebungen definiert wird („*Normalteilertopologie*"). Weiterhin sind unter „Gruppen" stets Gruppen der genannten Art zu verstehen[3]).

Eine (nicht notwendig invariante) Untergruppe B der Gruppe A ist genau dann offen, wenn sie einen offenen A-Normalteiler N_ν enthält und genau dann abgeschlossen, wenn sie als Durchschnitt von offenen Untergruppen darstellbar ist, d.h. wenn $B = \cap A_\beta$, wo A_β alle offenen Obergruppen von B in A durchläuft. Ist $B = N$ ein (in A) abgeschlossener *Normalteiler*, dann ist N bereits Durchschnitt aller N umfassenden offenen *Normalteiler*. Insbesondere ist also jede offene Untergruppe abgeschlossen. Ist B eine Untergruppe von A, so bilden die B-Normalteiler[4]) $B \cap N_\nu$ wo N_ν die offenen Normalteiler von A durchläuft, ein vollständiges System von Nullumgebungen für die durch die Topologie von A induzierte Topologie von B. Ist ferner B eine *abgeschlossene* Untergruppe von A, $[A/B]^{(l)}$[5]) die Menge der (natürlich gleichfalls in A abgeschlossenen) Linksnebenscharen von B in A und durchläuft wieder N_ν die offenen Normalteiler von A, so bilden die Mengen $[(N_\nu + B)/B]^{(l)}$ ein vollständiges System von Nullumgebungen für die durch die Topologie von A induzierte Topologie von $[A/B]^{(l)}$. Ist insbesondere B ein abgeschlossener *Normalteiler* von A, so werde die nach obiger Vorschrift topologisierte Restklassengruppe nach B wie üblich durch A/B bezeichnet.

Eine Menge $\mathfrak{B}$ von Linksnebenscharen $B^{(l)} \subseteq A$ nach *abgeschlossenen* Untergruppen von A nennen wir (in für uns zweckmäßiger Abänderung der sonst üblichen Terminologie) eine *Filterbasis* (in A), wenn sie mit je endlich vielen $B^{(l)}$ auch deren Durchschnitt enthält. Enthält $\mathfrak{B}$ darüber hinaus mit jedem $B^{(l)}$ auch alle $B^{(l)}$ enthaltenden Linksnebenscharen (in A) nach abgeschlossenen Untergruppen von A, dann heißt $\mathfrak{B}$ ein *Filter*. Zu jeder Filterbasis $\mathfrak{B}$ gibt es einen eindeutig bestimmten kleinsten $\mathfrak{B}$ enthaltenden Filter $\mathfrak{F}_\mathfrak{B}$, welcher aus allen abgeschlossenen Linksnebenscharen in A besteht, die eine Linksnebenschar aus $\mathfrak{B}$ enthalten. Wir bezeichnen $\mathfrak{F}_\mathfrak{B}$ als den „zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Filter", $\mathfrak{B}$ als eine „Filterbasis von $\mathfrak{F}_\mathfrak{B}$". Eine aus Nebenscharen nach *Normalteilern* bestehende Filterbasis heißt eine *Normalfilterbasis*, ein Filter der eine Normalfilterbasis besitzt ein *Normalfilter*. Ist allgemeiner $\mathfrak{E}$ ein System von abgeschlossenen Linksnebenscharen in A, die zu je endlich vielen einen nichtleeren Durchschnitt haben, so sind diese endlichen Durchschnitte offenbar wieder abgeschlossene Linksnebenscharen und durch ihre Hinzunahme zu $\mathfrak{E}$ entsteht aus $\mathfrak{E}$ eine Filterbasis $\mathfrak{B}$. Der zu $\mathfrak{B}$ gehörige Filter $\mathfrak{F}_\mathfrak{B}$ wird dann als „der von

[3]) Wegen der in dieser Nummer resümierten Grundeigenschaften der Gruppen mit einer Normalteilertopologie vgl. etwa HALL [3], für den Fall abelscher Gruppen auch SCHÖNEBORN [10]. Eine Darstellung unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen findet man bei HÄMISCH [2]. Für die verwendeten topologischen Begriffbildungen und Sätze s. BOURBAKI [1].

[4]) Wo kein Mißverständnis zu befürchten ist, schreiben wir statt „Normalteiler der Gruppe A", „Element der Gruppe A" und dergleichen gelegentlich auch kurz „A-Normalteiler", „A-Element" usw.

[5]) Wo einseitige Nebenscharen auftreten, beschränken wir uns auf die Betrachtung von *Links*nebenscharen und deuten dies gelegentlich durch den den betreffenden Symbolen beigefügten Index (l) an.

$\mathfrak{E}$ erzeugte Filter" bezeichnet. Die Menge aller offenen Untergruppen der Gruppe A bildet offenbar einen Normalfilter $\mathfrak{F}_0$, den *„charakteristischen Filter"* von A. — A ist genau dann diskret, wenn $(0) \in \mathfrak{F}_0$. Der Filter $\mathfrak{F}^{(1)}$ heißt *gröber* als der Filter $\mathfrak{F}^{(2)}$, $\mathfrak{F}^{(2)}$ *feiner* als $\mathfrak{F}^{(1)}$, wenn $\mathfrak{F}^{(1)} \subset \mathfrak{F}^{(2)}$. Sind $\tau^{(1)}$ und $\tau^{(2)}$ zwei in derselben abstrakten Gruppe A definierte Topologien mit den charakteristischen Filtern $\mathfrak{F}_0^{(1)}$ und $\mathfrak{F}_0^{(2)}$, dann soll $\tau^{(1)}$ gröber als $\tau^{(2)}$, $\tau^{(2)}$ feiner als $\tau^{(1)}$ genannt werden, wenn $\mathfrak{F}_0^{(1)}$ gröber als $\mathfrak{F}_0^{(2)}$ ist. — Unter dem *Durchschnitt eines Filters* $\mathfrak{F}$ schließlich verstehen wir den Durchschnitt aller zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Nebenscharen.

Ein CAUCHY-*Filter* in A ist ein Filter, der zu jeder offenen Untergruppe von A eine Linksnebenschar enthält. Die Gruppe A ist *vollständig*, wenn jeder CAUCHY-Filter in A einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. Dafür reicht bereits hin, daß jeder aus *offenen* Linksnebenscharen bestehende CAUCHY-Filter einen nichtleeren Durchschnitt hat. — Jede Gruppe A mit einer Normalteilertopologie läßt sich in eine im wesentlichen eindeutig bestimmte vollständige Gruppe $\hat{A}$, die *„vollständige Hülle"* von A, einbetten, deren charakteristischer Filter aus den vollständigen Hüllen $\hat{A}_\alpha$ der offenen Untergruppen A_α von A besteht. Ist insbesondere N_ν ein offener Normalteiler von A, $\hat{N}_\nu$ der entsprechende durch Abschließung in $\hat{A}$ aus N_ν hervorgehende offene Normalteiler von $\hat{A}$, *so sind die* (diskreten!) *Restklassengruppen* $\hat{A}/\hat{N}_\nu$ *und* A/N_ν *isomorph.* Denn die (sämtlich diskreten!) Gruppen $(A+\hat{N}_\nu)/\hat{N}_\nu$ und $A/(\hat{N}_\nu \cap A) = A/N_\nu$ sind isomorph und $A+\hat{N}_\nu$[6]) ist als Obergruppe von $\hat{N}_\nu$ offen, also abgeschlossen in $\hat{A}$, woraus sofort $A+\hat{N}_\nu = \hat{A}$ und damit die Behauptung folgt.

Die Gruppe A ist genau dann kompakt, wenn sie erstens vollständig ist und wenn zweitens alle offenen Normalteiler (und damit also alle offenen Untergruppen) von endlichem Index in A sind.

Sind $A^{(\alpha)}$ irgendwelche Gruppen, so bedeutet $\sum^T \oplus A^{(\alpha)}$ die *„(direkte)* TYCHONOFF-*Summe"*, d.i. die übliche (hier additiv geschriebene) aus allen (gegebenenfalls unendlichen) Summen $\sum a^{(\alpha)}$ $(a^{(\alpha)} \in A^{(\alpha)})$ bestehende topologische Produktgruppe der $A^{(\alpha)}$. Im Falle endlich vieler $A^{(\alpha)}$ schreiben wir statt $\sum^T \oplus A^{(\alpha)}$ auch einfach $A^{(1)} \oplus A^{(2)} \oplus \cdots \oplus A^{(n)}$. Bilden die N_ν ein den charakteristischen Filter von A erzeugendes System von offenen Normalteilern und ist $A^{(\nu)} = A/N_\nu$, dann gibt es nach einem bekannten Satz eine Abbildung von A in $\sum^T \oplus A^{(\nu)}$, welche sowohl ein gruppentheoretischer Isomorphismus als auch ein topologischer Homöomorphismus, also ein „topologischer Isomorphismus" ist (s. nächste Nummer). Ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\sum^T \oplus A^{(\alpha)}$ und werden die Elemente von $\mathfrak{M}$ in der Form $\sum a^{(\alpha)}$ $(a^{(\alpha)} \in A^{(\alpha)})$ dargestellt, so bilden (für festes α) die in diesen Darstellungen auftretenden Komponenten $a^{(\alpha)} \in A^{(\alpha)}$ in ihrer Gesamtheit die *„Projektion"* von $\mathfrak{M}$ in $A^{(\alpha)}$.

[6]) Das Zeichen $+$ bedeutet die übliche Komplexaddition. Sind B_1 und B_2 vertauschbare Untergruppen von A, so ist $B_1 + B_2$ natürlich die gewöhnliche Vereinigungsgruppe von B_1 und B_2.

2. Eine Abbildung eines topologischen Raumes in einem anderen nennen wir *offen*, wenn sie offene Mengen in offenen Mengen überführt. Unter einem *topologischen Homomorphismus (Isomorphismus)* einer Gruppe A auf eine Gruppe A' verstehen wir einen stetigen und offenen Homomorphismus (Isomorphismus). Die homomorphe Abbildung φ von A auf $A' = \varphi(A)$ ist genau dann ein topologischer Homomorphismus, wenn der (aus den in die Null von A' abgebildeten Elementen von A bestehende) „Kern" N von φ abgeschlossen in A und die zugehörige Abbildung der Restklassengruppe A/N auf $\varphi(A) = A'$ ein topologischer Isomorphismus ist. Ist B eine abgeschlossene Untergruppe von A, $[A/B]^{(l)}$ wieder der Raum der Linksnebenscharen von B in A und φ die natürliche Abbildung von A auf $[A/B]^{(l)}$, so ist φ stetig und offen. Eine Abbildung der Gruppe A auf einen topologischen Raum R heißt *abgeschlossen*, wenn sie abgeschlossene *Untergruppen* von A in abgeschlossene Untermengen von R überführt[7]).

Wir sagen, die *Gruppe A besitze die Eigenschaft* (A), wenn gilt

(A) Für jede abgeschlossene Untergruppe $B \subseteqq A$ ist die natürliche Abbildung von A auf $[A/B]^{(l)}$ abgeschlossen.

(2.1) *Besitzt die Gruppe A die Eigenschaft (A) und sind B und B' miteinander vertauschbare abgeschlossene Untergruppen von A, dann ist die gewöhnliche Vereinigungsgruppe $B + B'$ von B und B' abgeschlossen in A.*

Denn bei der natürlichen Abbildung φ von A auf den Linksnebenscharenraum $[A/B]^{(l)}$ geht B' in eine abgeschlossene Teilmenge $\overline{B}'$ von $[A/B]^{(l)}$ über. Das vollständige Urbild von $\overline{B}'$ in A vermöge φ ist aber $B + B'$ und wegen der Stetigkeit von φ ist $B + B'$ abgeschlossen.

(2.2) *Ist N ein abgeschlossener Normalteiler, B eine abgeschlossene Untergruppe der die Eigenschaft (A) besitzenden Gruppe A, dann ist der natürliche Isomorphismus von $B/(B \cap N)$ auf $(B+N)/N$ (in dieser Richtung!) stetig und abgeschlossen.*

Beweis. Wegen (2.1) können wir $A = B + N$ voraussetzen. φ sei die natürliche Abbildung von A auf $\bar{A} = A/N$, φ_B die dadurch induzierte Abbildung von B auf $\bar{A}$, $\overline{\varphi}_B$ die von φ_B induzierte natürliche Abbildung von $B/(B \cap N) = B^*$ auf $\bar{A}$. φ ist ein topologischer Homomorphismus, φ_B daher jedenfalls ein stetiger Homomorphismus und $\overline{\varphi}_B$ ein stetiger Isomorphismus auf $\bar{A}$. Sei $B^{*\prime}$ eine abgeschlossene Untergruppe von B^*. $B^{*\prime}$ entspricht in B eine abgeschlossene

[7]) Man beachte, daß ein in unserem Sinne abgeschlossener Homomorphismus nicht notwendig beliebige abgeschlossene Unter*mengen* in abgeschlossene Untermengen überführt, auch dann nicht, wenn er topologisch ist. Sei z. B. p eine Primzahl, Z_1 eine diskrete Torsionsgruppe vom Typ p^∞, so daß Z_1 ein unendliches Erzeugendensystem $a_1, a_2, \ldots$ mit den Relationen $p \cdot a_1 = 0$, $p \cdot a_{i+1} = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ besitzt. Ferner sei Z_2 die topologische Additionsgruppe der ganzen p-adischen Zahlen mit dem erzeugenden Element b, $A = Z_1 \oplus Z_2$ die topologische direkte Summe von Z_1 und Z_2, M die Menge der Elemente $a_1 + b$, $a_2 + p \cdot b$, $a_3 + p^2 \cdot b, \ldots$. Wie leicht zu sehen, besitzt M keinen Häufungspunkt in A und ist mithin abgeschlossen. Aber die Bildmenge $\overline{M}$ von M in $\bar{A} = A/Z_1$ ist die gegen Null konvergente und wegen $\overline{0} \notin \overline{M}$ nicht abgeschlossene Folge $\overline{b}, p \cdot \overline{b}, p^2 \cdot \overline{b}, \ldots$. Hingegen ist das Bild jeder abgeschlossenen *Untergruppe* von A in $\bar{A}$ offenbar abgeschlossen.

Untergruppe $B' \supseteq B \cap N$ und diese geht bei φ in die wegen (A) abgeschlossene Untergruppe $\overline{B}' = \varphi(B') = \varphi_B(B') = \overline{\varphi}_B(B^{*\prime})$ über, woraus die Behauptung folgt.

Sei nun wieder B eine abgeschlossene Untergruppe der Gruppe A und φ die natürliche Abbildung von A auf die Menge $L^{(B)}$ der Linksnebenscharen nach B. $L^{(B)}$ kann in bekannter Weise topologisiert werden durch Einführung eines vollständigen Systems von Umgebungen $L_\lambda^{(B)}$ der Nullklasse $\overline{0} \in L^{(B)}$ und vermöge der Festsetzung, daß für $\overline{a} \in L^{(B)}$ die Menge der $\overline{a} + L_\lambda^{(B)}$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen von $\overline{a}$ bilden soll, wo $\overline{a}$ und die Elemente der $L_\lambda^{(B)}$ als Linksnebenscharen nach B aus A aufzufassen sind und die Summenbildung $\overline{a} + L_\lambda^{(B)}$ im Sinne der üblichen Komplexrechnung zu verstehen ist. Eine solche Topologie des „homogenen Raumes" $L^{(B)}$ soll als *„zulässig"* bezeichnet werden, wenn sie durch ein aus natürlichen Bildern $\varphi(A_\beta)$ offener Untergruppen A_β von A mit $\bigcap A_\beta = B$ bestehendes Fundamentalsystem von Umgebungen der $\overline{0}$ definiert werden kann. Offenbar ist dann die natürliche Abbildung φ von A auf $L^{(B)}$ stetig. Dann und nur dann wenn φ außerdem offen ist, ist $L^{(B)}$ mit $[A/B]^{(l)}$ identisch, d.h. die Topologie von $[A/B]^{(l)}$ ist die feinste für $L^{(B)}$ zulässige Topologie. Wir sagen, die Gruppe A *besitze die Eigenschaft* (O), wenn für jede abgeschlossene Untergruppe $B \subseteq A$ der Nebenscharenraum $L^{(B)}$ nur *eine* zulässige Topologie (also nur die von $[A/B]^{(l)}$) besitzt, oder, anders ausgedrückt, wenn gilt:

(O) *Für jede abgeschlossene Untergruppe B der Gruppe A ist die natürliche Abbildung φ von A auf den zulässig topologisierten Nebenscharenraum $L^{(B)}$ offen.*

Die Gruppen mit der Eigenschaft (O) lassen sich wieder rein gruppentheoretisch charakterisieren, denn es gilt

(2.3) *Ist A eine Gruppe mit dem charakteristischen Filter $\mathfrak{F}_0$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) *A besitzt die Eigenschaft (O).*

b) *Verschiedene Teilfilter von $\mathfrak{F}_0$ haben verschiedene Durchschnitte.*

Beweis. Aus a) folgt b): Zwei verschiedene Teilfilter des charakteristischen Filters $\mathfrak{F}_0$ von A mögen gleichen Durchschnitt B haben, wo also B eine abgeschlossene Untergruppe von A ist. Dann ist wenigstens einer der beiden Filter — er möge $\mathfrak{F}'_B$ genannt werden — verschieden von dem aus *allen* offenen Untergruppen $A_\beta \supseteq B$ bestehenden Filter $\mathfrak{F}_B$, dessen Durchschnitt gleichfalls B ist. Offenbar ist $\mathfrak{F}'_B$ gröber als $\mathfrak{F}_B$ und es gibt eine zu $\mathfrak{F}_B$ aber nicht zu $\mathfrak{F}'_B$ gehörige Untergruppe $A_{\beta_0} \supset B$. Sei nun $L^{(B)}$ der zu B gehörige Linksnebenscharenraum, dessen Topologie durch die natürlichen Bilder $\varphi(A_{\beta'})$ der $A_{\beta'} \in \mathfrak{F}'_B$ definiert wird. Wegen a) ist $L^{(B)} = [A/B]^{(l)}$ und es gibt ein $A_{\beta'_0} \in \mathfrak{F}'_B$ mit $\varphi(A_{\beta'_0}) \subseteq \varphi(A_{\beta_0})$. Daraus folgt $A_{\beta'_0} \subseteq A_{\beta_0}$, $A_{\beta_0} \in \mathfrak{F}'_B$ — Widerspruch. Aus b) folgt a): Sei φ die natürliche (und also stetige) Abbildung von A auf den zulässig topologisierten Linksnebenscharenraum $L^{(B)}$ nach der abgeschlossenen Untergruppe $B \subseteq A$. Zum Nachweis von (O) genügt es offenbar zu zeigen, daß jeder offene Normalteiler N_ν von A durch φ in eine offene Untermenge von $L^{(B)}$ überführt wird und da das vollständige Urbild von $\varphi(N_\nu)$ in A die

offene Gruppe $A_\beta = B + N_\nu$ ist, bleibt zu beweisen, daß $\varphi(A_\beta)$ offen in $L^{(B)}$ für jede offene Untergruppe $A_\beta \supseteq B$. Nun gibt es ein System von Untergruppen $A_{\beta'} \supseteq B$, so daß die Bilder $\varphi(A_{\beta'})$ ein Fundamentalsystem von Umgebungen der Nullklasse $\bar{0}$ in $L^{(B)}$ bilden. Und hieraus folgt $\cap \varphi(A_{\beta'}) = \bar{0}$, $\cap A_{\beta'} = B$ und wegen b) muß es endlich viele β', etwa $\beta'_1, \ldots, \beta'_n$ mit $\cap A_{\beta'_i} \subseteq A_\beta$ geben, so daß also $\cap \varphi(A_{\beta'_i}) = \varphi(\cap A_{\beta'_i}) \subseteq \varphi(A_\beta)$. Daraus folgt die Offenheit von $\varphi(A_\beta)$.

3. Unter der *Kommutatorgruppe* $K = K(A)$ der Gruppe A verstehen wir hier die in A abgeschlossene Hülle der gewöhnlichen Kommutatorgruppe von A. Sind N_ν die offenen Normalteiler von A und ist $\bar{K}_\nu$ die Kommutatorgruppe von A/N_ν, K_ν die entsprechende Untergruppe aus A, dann ist, wie leicht zu sehen $K = \cap K_\nu$. Sind im besonderen die Restklassengruppen A/N_ν sämtlich abelsch, dann ist $\bar{K}_\nu = \bar{0}$, $K_\nu = N_\nu$, $K = 0$ und es folgt, daß auch A abelsch ist.

Der *Normalisator* $N(B)$ einer Untergruppe B von A wird wie üblich erklärt. Es gilt:

(3.1) *Der Normalisator einer abgeschlossenen Untergruppe $B \subseteq A$ ist abgeschlossen in A.*

Beweis. Sei B eine abgeschlossene Untergruppe von A, $\widetilde{N(B)}$ die (in A) abgeschlossene Hülle von $N(B)$ und $a \in \widetilde{N(B)}$. Ist N_ν ein offener Normalteiler von A, dann ist für jedes $n \in N(B)$: $n + (N_\nu + B) = (N_\nu + B) + n$, d.h. es gilt $N(B) \subseteq N(N_\nu + B)$. Mit $N_\nu + B$ ist auch $N(N_\nu + B)$ offen und also abgeschlossen in A und es folgt $\widetilde{N(B)} \subseteq N(N_\nu + B)$, d.h. $a + (N_\nu + B) = (N_\nu + B) + a$ für jedes ν. Die Scharen $a + (N_\nu + B)$ bzw. $(N_\nu + B) + a$ bilden nun offenbar Filterbasen mit den Durchschnitten $a + B$ bzw. $B + a$ und es folgt $a + B = B + a$, $a \in N(B)$ w. z. z. w.

Das *Zentrum* einer Gruppe A und allgemein der *Zentralisator* einer beliebigen Untermenge wird ebenso wie bei diskreten Gruppen erklärt. Beide sind gleichfalls stets abgeschlossen in A.

Definition. Die Gruppe A mit den offenen Normalteilern N_ν heißt eine „*p-Gruppe*", wo p eine ganzrationale Primzahl bedeutet, wenn für alle offenen Normalteiler N_ν von A A/N_ν eine (gewöhnliche) p-Gruppe ist.

Wie sofort zu sehen ist, ist jede (nicht notwendig abgeschlossene) Untergruppe und jede Restklassengruppe nach einem abgeschlossenen Normalteiler einer p-Gruppe sowie jede TYCHONOFF-Summe von (zur gleichen Primzahl p gehörigen) p-Gruppen wiederum eine p-Gruppe. Ebenso ist die vollständige Hülle einer p-Gruppe eine p-Gruppe. Daraus ergibt sich allgemeiner: Ist B eine p-Untergruppe der Gruppe A, dann auch die (in A) abgeschlossene Hülle $\widetilde{B}$ von B. Denn $\widetilde{B}$ ist in der vollständigen Hülle $\hat{B}$ von B enthalten. Hieraus und aus der Tatsache, daß die Vereinigungsmenge einer (eventuell transfiniten) aufsteigenden Folge von p-Gruppen eine p-Gruppe ist, folgt nun

(3.2) *Jede p-Untergruppe einer Gruppe A ist in (mindestens) einer maximalen p-Untergruppe P von A enthalten. P ist abgeschlossen in A und heißt p-Sylowgruppe von A.*

Die folgende Betrachtung zeigt, wie die p-Sylowgruppen einer Gruppe A aus den p-Sylowgruppen der diskreten Restklassengruppen von A nach den offenen Normalteilern N_ν erhalten werden können: Sei P eine p-Sylowgruppe von A, $\bar{A}^{(\nu)} = A/N_\nu$, $\bar{P}^{(\nu)}$ das Bild von P bei dem natürlichen Homomorphismus von A auf $\bar{A}^{(\nu)}$. $\bar{P}^{(\nu)}$ ist eine p-Gruppe und also in einer p-Sylowgruppe $\bar{P}_\nu$ aus $\bar{A}^{(\nu)}$ enthalten. P_ν sei die $\bar{P}_\nu$ entsprechende Untergruppe von A. *Dann ist* $P = \bigcap P_\nu$. Denn offenbar ist zunächst $P \subseteq \bigcap P_\nu$. Sei nun $a \in \bigcap P_\nu$. Dann ist a modulo jedem offenen Normalteiler N_ν von A von p-Potenzordnung und also $\bigcap P_\nu$ eine p-Gruppe, woraus die Behauptung folgt.

Wie üblich sieht man, daß die Konjugierten einer p-Sylowgruppe wieder p-Sylowgruppen sind. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß alle p-Sylowgruppen einer Gruppe A untereinander konjugiert sind, liefert die folgende *Verallgemeinerung des Satzes von* SYLOW:

(3.3) *Ist A kompakt und besitzt eine abgezählte charakteristische Basis $N_1 > N_2 > \cdots$, so sind für jede feste Primzahl p alle p-Sylowgruppen von A konjugiert.*

Beweis. Seien P und P^* zwei p-Sylowgruppen von A. Die Gruppen $\bar{A}^{(\nu)}$ $\bar{P}_\nu$, P_ν mögen die oben eingeführten Bedeutungen haben und analog seien $\bar{P}_\nu^*$, P_ν^* die entsprechenden zu P^* gehörigen Gruppen. Wegen der Endlichkeit von $\bar{A}^{(\nu)}$ sind $\bar{P}_\nu$ und $\bar{P}_\nu^*$ konjugiert in $\bar{A}^{(\nu)}$ und es gibt eine N_ν-Restklasse $\bar{a}_\nu$ mit $\bar{a}_\nu + \bar{P}_\nu - \bar{a}_\nu = \bar{P}_\nu^*$. Ist also a_ν' ein A-Element aus $\bar{a}_\nu$, so ist $a_\nu' + P_\nu - a_\nu' = P_\nu^*$. Sei nun ν_0 ein Index mit $N_{\nu_0} < N_\nu$. Dann ist $P_{\nu_0} \subseteq P_\nu$ und $P_{\nu_0}^* \subseteq P_\nu^*$ und wegen $a_\nu' + P_\nu - a_\nu' = P_\nu^*$ ist $a_\nu' + P_{\nu_0} - a_\nu' = P_{\nu_0}' \subseteq P_\nu^*$. P_{ν_0}' und $P_{\nu_0}^*$ entsprechen in $\bar{A}^{(\nu_0)} = A/N_{\nu_0}$ die p-Sylowgruppen $\bar{P}_{\nu_0}'$ und $\bar{P}_{\nu_0}^*$ und wegen $P_{\nu_0}' \subseteq P_\nu^*$, $P_{\nu_0}^* \subseteq P_\nu^*$ sind $\bar{P}_{\nu_0}'$ und $\bar{P}_{\nu_0}^*$ erst recht p-Sylowgruppen in P_ν^*/N_{ν_0}. Daraus folgt die Existenz eines $a_{\nu_0}' \in P_\nu^*$ mit $a_{\nu_0}' + P_{\nu_0}' - a_{\nu_0}' = P_{\nu_0}^*$. Setzt man nun $a_{\nu_0} = a_{\nu_0}' + a_\nu'$, dann ist $a_{\nu_0} + P_\nu - a_{\nu_0} = a_{\nu_0}' + (a_\nu' + P_\nu - a_\nu') - a_{\nu_0}' = P_\nu^*$ und $a_{\nu_0} + P_{\nu_0} - a_{\nu_0} = a_{\nu_0} + (a_\nu' + P_{\nu_0} - a_\nu') - a_{\nu_0}' = a_{\nu_0}' + P_{\nu_0}' - a_{\nu_0}' = P_{\nu_0}^*$, d.h. a_{ν_0} transformiert sowohl die „größere" Gruppe P_ν als auch die darin enthaltene „kleinere" Gruppe P_{ν_0} in die entsprechenden Gruppen P_ν^* bzw. $P_{\nu_0}^*$. Aus der Existenz eines solchen a_{ν_0} folgt nun leicht: Ist $\mathfrak{A}_\nu$ die Menge aller a_ν mit $a_\nu + P_\nu - a_\nu = P_\nu^*$, so ist für irgend zwei Indizes ν, ν' der Durchschnitt $\mathfrak{A}_\nu \cap \mathfrak{A}_{\nu'}$ nicht leer (setze $N_{\nu_0} = N_\nu \cap N_{\nu'}$!) und wegen der Kompaktheit von A ist der Durchschnitt der $\mathfrak{A}_\nu$ nicht leer. Sei $a \in \bigcap \mathfrak{A}_\nu$. Dann ist $a + P_\nu = P_\nu^* + a$ für jedes ν und wegen $\bigcap P_\nu = P$, $\bigcap P_\nu^* = P^*$ ist $a + P = P^* + a$ und P und P^* sind konjugiert in A w. z. z. w.

4. *Definition.* Die Gruppe A heißt *linear-kompakt*, wenn jeder Filter in A einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Notwendig und hinreichend für die lineare Kompaktheit von A ist schon, daß jeder aus *offenen* Linksnebenscharen bestehende Filter einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. Denn ist $\mathfrak{F}$ ein beliebiger aus den abgeschlossenen Linksnebenscharen $B_\beta^{(l)}$ bestehender Filter, so ist zunächst für festes β $B_\beta^{(l)}$ Durchschnitt aller $B_\beta^{(l)}$ enthaltenden offenen Linksnebenscharen $A_{\alpha_\beta}^{(l)}$ und die Menge aller $A_{\alpha_\beta}^{(l)}$ (genommen über alle β) bildet offenbar einen Filter $\mathfrak{F}'$ mit dem gleichen Durchschnitt wie $\mathfrak{F}$.

Jede kompakte Gruppe ist offenbar linear-kompakt, jede linear-kompakte Gruppe vollständig.

(4.1) *Jede abgeschlossene Untergruppe B und jede Restklassengruppe A/N nach einem abgeschlossenen Normalteiler N einer linear-kompakten Gruppe A ist linear-kompakt.*

Für abgeschlossene Untergruppen ist die Behauptung trivial, denn jeder Filter in B ist ein Filter in A. Ist ferner N ein abgeschlossener Normalteiler in A, $\overline{\mathfrak{F}}$ ein Filter in der Restklassengruppe $\bar{A} = A/N$, so entspricht $\overline{\mathfrak{F}}$ in A ein Filter $\mathfrak{F}$ und mit $\mathfrak{F}$ hat auch $\overline{\mathfrak{F}}$ einen nichtleeren Durchschnitt.

(4.2) *Sind die Gruppen $A^{(\alpha)}$ sämtlich linear-kompakt, so auch ihre* TYCHONOFF-*Summe* $A = \sum^T \oplus A^{(\alpha)}$.

Beweis. Da A als TYCHONOFF-Summe von vollständigen Gruppen nach einem bekannten Satz vollständig ist, genügt es zu zeigen, daß sich jeder Filter in A zu einem CAUCHY-Filter verfeinern läßt, und nach dem oben Bemerkten braucht man dabei nur Filter aus Nebenscharen nach *offenen* Untergruppen zu betrachten. Der Beweis verläuft nun nach bekanntem Schema: Sei $\mathfrak{F}' = \{A_\nu^{(l)}\}$ ein aus offenen Linksnebenscharen $A_\nu^{(l)}$ bestehender Filter in A. Nach dem ZORNschen Lemma existiert ein aus offenen Nebenscharen $A_\nu^{(l)}$ bestehender feinster Filter $\mathfrak{F} = \{A_\nu^{(l)}\}$ mit $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$. Die Projektionen $(A_\nu^{(l)})^{(\alpha)}$ der $A_\nu^{(l)}$ in $A^{(\alpha)}$ liefern einen Filter $\mathfrak{F}^{(\alpha)}$ in $A^{(\alpha)}$ und wegen der linearen Kompaktheit von $A^{(\alpha)}$ hat dieser einen nichtleeren Durchschnitt. Sei $a^{(\alpha)} \in \bigcap_\nu (A_\nu^{(l)})^{(\alpha)}$, $a = \sum a^{(\alpha)}$, $B^{(l)}$ eine a enthaltende offene Linksnebenschar aus A, $(B^{(l)})^{(\alpha)}$ die Projektion von $B^{(l)}$ in $A^{(\alpha)}$. Dann gibt es für geeignete $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ offene $a^{(\alpha_i)}$ enthaltende Linksnebenscharen $(\tilde{B}^{(l)})^{(\alpha_i)}$ in $A^{(\alpha_i)}$ mit $\bigcap_i \left((\tilde{B}^{(l)})^{(\alpha_i)} + \sum_{\alpha \neq \alpha_i}^T \oplus A^{(\alpha)}\right) \subseteq B^{(l)}$ und aus $a^{(\alpha_i)} \in (\tilde{B}^{(l)})^{(\alpha_i)}$ $(A_\nu^{(l)})^{(\alpha_i)}$ für jedes $(A_\nu^{(l)})^{(\alpha_i)} \in \mathfrak{F}^{(\alpha_i)}$ folgt $\left((\tilde{B}^{(l)})^{(\alpha_i)} + \sum_{\alpha \neq \alpha_i}^T \oplus A^{(\alpha)}\right) \cap A_\nu^{(l)}$ nicht leer für jedes $A_\nu^{(l)} \in \mathfrak{F}$. Da $\mathfrak{F}$ ein feinster Filter ist, folgt $(\tilde{B}^{(l)})^{(\alpha_i)} + \sum_{\alpha \neq \alpha_i}^T \oplus A^{(\alpha)} \in \mathfrak{F}$, also $\bigcap_i \left((\tilde{B}^{(l)})^{(\alpha_i)} + \sum_{\alpha \neq \alpha_i}^T \oplus A^{(\alpha)}\right) \in \mathfrak{F}$, $B^{(l)} \in \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{F}'$ ist ein CAUCHY-Filter.

Nunmehr ergibt sich leicht:

(4.3) *Die vollständige Hülle $\hat{A}$ der Gruppe A ist genau dann linear-kompakt, wenn die (diskreten) Restklassengruppen A/N_ν von A nach ihren offenen Normalteilern sämtlich linear-kompakt sind.*

In der Tat. Ist $\hat{A}$ linear-kompakt, dann nach (4.1) auch $\hat{A}/\hat{N}_\nu \cong A/N_\nu$ wo $\hat{N}_\nu$ die in $\hat{A}$ abgeschlossene Hülle von N_ν bedeutet. Seien umgekehrt die A/N_ν linear-kompakt. Dann gilt nach (4.2) gleiches für die TYCHONOFF-Summe $A' = \sum^T \oplus (A/N_\nu)$. Nach einer am Schluß von **1.**) gemachten Bemerkung ist A eine Untergruppe A'' von A' topologisch isomorph und wegen der linearen Kompaktheit und also Vollständigkeit von A' ist die vollständige Hülle $\hat{A}''$ von A'' zu der in A' abgeschlossenen Hülle $\tilde{A}''$ von A'' topologisch isomorph. Aus der Isomorphieinvarianz von Vollständigkeit und linearer Kompaktheit folgt jetzt die lineare Kompaktheit von $\tilde{A}''$ und die von $\hat{A}''$ und $\hat{A}$.

Wegen (4.3) sind die Eigenschaften der *diskreten* linear-kompakten Gruppen von besonderem Interesse.

(4.4) *Jede diskrete linear-kompakte Gruppe A ist periodisch und kann nicht als direkte Summe unendlich vieler Normalteiler dargestellt werden.*

Beweis. Wäre A nicht periodisch, so enthielte A die unendliche zyklische Gruppe, aber diese ist sicher nicht linear-kompakt — im Widerspruch zu (4.1). Sei nun $A = \sum \oplus N^{(\nu)}$ die (gewöhnliche) direkte Summe der unendlich vielen Normalteiler $N^{(\nu)}$, so daß also A aus allen eindeutigen endlichen Summen $\sum a^{(\nu)}$ $(a^{(\nu)} \in N^{(\nu)})$ besteht. Für irgendein $\nu = \nu_0$ wähle man $a^{(\nu_0)} \in N^{(\nu_0)}$ mit $a^{(\nu_0)} \neq 0$ und bilde die Menge $U^{(\nu_0)}$ aller Elemente der Form $a^{(\nu_0)} + \sum_{\nu \neq \nu_0} a^{(\nu)}$ (endliche Summen, $a^{(\nu)} \in N^{(\nu)}$). $U^{(\nu_0)}$ ist offenbar eine Nebenschar von $\sum_{\nu \neq \nu_0} \oplus N^{(\nu)}$. Läßt man nun ν_0 die Menge aller ν durchlaufen, so bilden die zugehörigen $U^{(\nu_0)}$ offenbar eine Filterbasis mit leerem Durchschnitt — im Widerspruch zur linearen Kompaktheit von A.

(4.5) *Sei B eine abgeschlossene Untergruppe der linear-kompakten Gruppe A, $L^{(B)}$ der zulässig topologisierte Linksnebenscharenraum von A nach B (vgl. Nr. 2) und φ die natürliche Abbildung von A auf $L^{(B)}$. Dann ist φ abgeschlossen.*

Beweis. Sei C eine abgeschlossene Untergruppe von A, $\bar{a}$ ein Häufungspunkt von $\varphi(C)$ in $L^{(B)}$. Dann gibt es zu $\bar{a}$ ein Fundamentalsystem $\overline{\mathfrak{U}}$ von Umgebungen $\overline{U}_\beta$ von der Gestalt $\overline{U}_\beta = \bar{a} - \varphi(A_\beta)$, wo die A_β die offenen Obergruppen von B sind und wo $\overline{U}_\beta \cap \varphi(C)$ nicht leer ist für alle β. Das vollständige Urbild U_β von $\overline{U}_\beta$ in A vermöge φ ist $U_\beta = (a + B) + (A_\beta + B) = a + A_\beta$, wo a in der Linksnebenschar $\bar{a}$ liegt, d.h. $\overline{U}_\beta = \varphi(a + A_\beta)$. Aus $\overline{U}_\beta \cap \varphi(C)$ nicht leer folgt die Existenz eines $c_\beta \in C$ mit $c_\beta \in a - A_\beta$ so daß $(a + A_\beta) \cap C$ nicht leer für jedes β. Wegen der linearen Kompaktheit hat der von den $(a + A_\beta) \cap C$ erzeugte Filter einen nicht leeren Durchschnitt und enthält also ein $c \in C$. Dann ist $\bar{a} = \bigcap \overline{U}_\beta = \varphi\left(\bigcap (a - A_\beta)\right) \in \varphi(C)$ und $\varphi(C)$ ist abgeschlossen.

Als unmittelbare Folge von (4.5) ergibt sich, daß jede linear-kompakte Gruppe die Eigenschaft (A) aus Nr. 2 besitzt.

(4.6) *Ist φ ein stetiger Homomorphismus der linear-kompakten Gruppe A auf die Gruppe A', dann ist A' linear-kompakt und φ abgeschlossen.*

Beweis. φ induziert einen stetigen Isomorphismus einer Restklassengruppe $\bar{A}$ von A auf A' und wegen (4.1) und (4.5) genügt es, den Satz für den Fall eines stetigen *Isomorphismus* φ von $A = \bar{A}$ auf A' zu beweisen. Sei nun $\mathfrak{F}'$ ein Filter aus A'. Wegen der Stetigkeit von φ entspricht ihm in A ein (gleichfalls aus *abgeschlossenen* Nebenscharen bestehender) Filter $\mathfrak{F}$ und dieser und damit auch $\mathfrak{F}'$ hat wegen der linearen Kompaktheit von A einen nicht leeren Durchschnitt, woraus die lineare Kompaktheit von A' folgt. Der zweite Teil der Behauptung ist eine unmittelbare Folge von (4.5).

5[8]). *Definition.* Eine abgeschlossene Untergruppe B der Gruppe A heißt eine „*G-Untergruppe*" von A, wenn gilt: Ist $\{B_\beta\}$ ein System von Untergruppen

[8]) Wegen der Bedeutung dieser Nummer im Rahmen der vorliegenden Arbeit vgl. den entsprechenden Abschnitt der Einleitung.

aus A mit $\cap B_\beta = B$, so gibt es bereits endlich viele B_β, etwa $B_{\beta_1}, \ldots, B_{\beta_n}$ mit $\cap B_{\beta_i} = B$.

Jede G-Untergruppe von A ist offen, weil nach Nr. 1 als Durchschnitt von offenen und mithin von endlich vielen offenen Untergruppen darstellbar.

Wir betrachten zunächst *G-Normalteiler* und stellen die folgenden Grundeigenschaften der G-Normalteiler zusammen:

a) Ist N G-Normalteiler von A, $B \leqq A$ eine Obergruppe von N, dann ist N G-Normalteiler von B.

b) Ist N' ein abgeschlossener Normalteiler von A, dann ist ein Normalteiler $N \geqq N'$ genau dann G-Normalteiler in A, wenn der entsprechende Normalteiler $\bar{N}$ aus $\bar{A} = A/N'$ G-Normalteiler in $\bar{A}$ ist.

c) Ist N' ein G-Normalteiler von A, $N \leqq N'$ ein Normalteiler von A, welcher G-Normalteiler in N' ist, dann ist N G-Normalteiler in A.

d) Ist A' eine abgeschlossene Untergruppe von A, N ein G-Normalteiler von A, dann ist $N' = A' \cap N$ ein G-Normalteiler von A'.

a) und b) sind trivial. *Beweis von c).* N ist offenbar offen in A und $\bar{A} = A/N$ diskret. $\bar{\mathfrak{N}}$ sei ein Filter aus $\bar{A}$ mit dem Durchschnitt $\bar{0} \in \bar{A}$, $\bar{N}'$ der N' entsprechende G-Normalteiler aus $\bar{A}$. Nach b) ist $\bar{0}$ G-Normalteiler in $\bar{N}'$. Folglich gibt es eine Gruppe $\bar{A}_{\alpha_0} \supset \bar{\mathfrak{N}}$ mit $\bar{N}' \cap \bar{A}_{\alpha_0} = \bar{0}$ und $\bar{\mathfrak{N}}$ geht bei Übergang zur Restklassengruppe $\bar{\bar{A}} = \bar{A}/\bar{N}'$ in den zu $\bar{\mathfrak{N}}$ „lokalisomorphen" Filter $\bar{\bar{\mathfrak{N}}}$ über. Daher ist der Durchschnitt von $\bar{\bar{\mathfrak{N}}}$ gleich $\bar{\bar{0}}$ und da $\bar{\bar{0}}$ nach b) G-Normalteiler von $\bar{\bar{A}}$ ist, folgt $\bar{\bar{0}} \in \bar{\bar{\mathfrak{N}}}$, also $\bar{N}' \in \bar{\mathfrak{N}}$, $\bar{0} = \bar{N} \cap \bar{A}_{\alpha_0} \in \bar{\mathfrak{N}}$. Aus $\bar{0} \in \bar{\mathfrak{N}}$ für jeden Filter $\bar{\mathfrak{N}}$ mit dem Durchschnitt $\bar{0}$ folgt aber leicht, daß $\bar{0}$ G-Normalteiler von $\bar{A}$, also N G-Normalteiler von A ist. *Beweis von d).* N ist G-Normalteiler in $A' + N$ und die diskrete Gruppe $(A' + N)/N$ ist isomorph zur gleichfalls diskreten Gruppe $A'/A' \cdot N = A'/N'$. Da in $(A' + N)/N$ die Nullgruppe G-Normalteiler ist, gilt das gleiche für A'/N' und hieraus folgt die Behauptung nach b).

Nach c) und d) ist der Durchschnitt endlich vieler G-Normalteiler wieder ein solcher, d.h.

(5.1) *Die Menge der G-Normalteiler einer Gruppe A bildet eine Normalfilterbasis.*

Dieser Satz legt die Frage nahe, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen der zu der Normalfilterbasis aus (5.1) gehörige Filter nur aus G-Untergruppen besteht, ob also jede Obergruppe eines G-Normalteilers eine G-Untergruppe ist [9]).

Definition. Eine Untergruppe B einer Gruppe A heißt *„große Untergruppe"* von A, oder einfach „groß in A", wenn ein abgeschlossener Normalteiler $N \leqq B$ von A existiert, so daß die Restklassengruppe A/N der Minimalbedingung [10]) genügt.

[9]) Die allgemeinere Frage, ob überhaupt jede Obergruppe einer (nicht notwendig invarianten) G-Untergruppe eine G-Untergruppe ist, wird hier nicht untersucht.

[10]) Unter der Minimalbedingung (schlechthin) wird in dieser Arbeit stets die *Minimalbedingung für Untergruppen* verstanden.

Offenbar ist jede große Untergruppe eine G-Untergruppe und mithin offen in A. In bekannter Weise ergibt sich:

a) Ist N großer Normalteiler in A, B eine abgeschlossene Untergruppe von A, dann ist $B \cap N$ großer Normalteiler von B.

b) Sind N und $N' \supseteq N$ Normalteiler von A, N' groß in A und N groß in N', dann ist N groß in A.

Daraus folgt sofort, daß der Durchschnitt endlich vieler großer Normalteiler ein großer Normalteiler und damit der Durchschnitt endlich vieler großer Untergruppen eine große Untergruppe ist. Da auch jede Obergruppe einer großen Untergruppe groß ist, haben wir als Gegenstück zu (5.1):

(5.2) *Die Menge aller großen Untergruppen einer Gruppe A bildet einen Normalfilter.*

Hinsichtlich der im Anschluß an (5.1) gestellten Frage ergibt sich jetzt sofort:

(5.3) *Der von einer Menge von G-Normalteilern $N^{(\nu)}$ einer Gruppe A erzeugte Filter $\mathfrak{F}$ besteht dann und nur dann ausschließlich aus G-Untergruppen, wenn die $N^{(\nu)}$ groß in A sind.*

Beweis. Sind die $N^{(\nu)}$ groß in A, so auch sämtliche Untergruppen des von den $N^{(\nu)}$ erzeugten Filters, d.h. sämtliche zu $\mathfrak{F}$ gehörige Untergruppen sind sicherlich G-Untergruppen. — Möge nun umgekehrt $\mathfrak{F}$ aus G-Untergruppen bestehen und sei $B \in \mathfrak{F}$. Da $\mathfrak{F}$ ein Normalfilter ist, gibt es einen Normalteiler $N \in \mathfrak{F}$ mit $N \subseteq B$. Sei $\bar{A} = A/N$. Da jede Obergruppe von N G-Untergruppe in A ist, sind sämtliche Untergruppen von $\bar{A}$ G-Untergruppen von $\bar{A}$ und aus der Definition der G-Untergruppe folgt sofort, daß in $\bar{A}$ jede absteigende Untergruppenkette nach endlich vielen Gliedern abbricht. Mithin genügt $\bar{A}$ der Minimalbedingung und B ist groß in A w. z. z. w.

Nach (5.3) ist die an (5.1) angeschlossene Frage äquivalent zu der folgenden:

(F) *Ist jeder G-Normalteiler der Gruppe A groß in A?*

Wir nennen eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für eine bejahende Antwort auf die Frage (F) und können uns dabei offenbar auf die Betrachtung diskreter Gruppen beschränken. (Man bilde die Restklassengruppe nach dem in Rede stehenden — jedenfalls offenen — Normalteiler.)

(5.4) *Ist jeder G-Normalteiler der diskreten Gruppe A ein großer Normalteiler, so besitzt A die folgende Eigenschaft*:

(E_1) *Gibt es eine der Minimalbedingung genügende Untergruppe B von A derart, daß jede Untergruppe $\neq (0)$ von A mit B einen Durchschnitt $\neq (0)$ hat, so genügt A der Minimalbedingung.*

Beweis. Sei $\mathfrak{F}$ ein aus Untergruppen B_σ bestehender Filter in A mit $\cap B_\sigma = (0)$. Wegen $B_\sigma \cap B \neq (0)$ für $B_\sigma \neq (0)$ und wegen der Minimalbedingung für B folgt aus $\cap B_\sigma = (0)$ die Existenz eines B_{σ_0} mit $B_{\sigma_0} = 0$, d.h. $(0) \in \mathfrak{F}$.

Daraus folgt leicht, daß (0) G-Normalteiler von A ist und daraus nach Voraussetzung die Minimalbedingung für A[11]).

Gewissermaßen als Gegenstück zu (5.4) gilt nun:

(5.5) *Die diskrete Gruppe A besitze die folgende Eigenschaft:*

(E_2) *Ist B eine der Minimalbedingung genügende Untergruppe von A und M eine in A maximale Untergruppe mit $B \cap M = (0)$, dann genügt jede Untergruppe B_0 von A mit $B_0 \supseteq B$, $B_0 \cap M = 0$ gleichfalls der Minimalbedingung.*

Dann ist jeder G-Normalteiler groß in A.

Beweis. Sei irgendein G-Normalteiler in A gegeben. Indem wir sofort Restklassengruppenbildung vorgenommen denken, können wir uns auf den Fall beschränken, daß (0) G-Normalteiler von A ist. In A gibt es nun sicher eine wohlgeordnete absteigende Untergruppenkette $\cdots \supset B_\sigma \supset B_{\sigma+1} \supset \cdots$ mit den folgenden Eigenschaften: 1. Jede als Durchschnitt irgendwelcher B_σ darstellbare Untergruppe kommt in der Kette vor. 2. Genügt B_σ nicht der Minimalbedingung, dann gibt es unendlich viele $B_{\sigma'} \subset B_\sigma$ in der Kette. — Angenommen nun, A genüge der Minimalbedingung nicht, dann reißt die Kette der B_σ mit einer gewissen Ordinalzahl λ ab, die o. B. d. A. als Limeszahl vorausgesetzt werden kann und B_λ genügt der Minimalbedingung. M sei eine in A maximale Untergruppe mit $B_\lambda \cap M = (0)$. Aus $\bigcap (M \cap B_\sigma) = 0$ und der G-Eigenschaft von (0) folgt nun die Existenz eines $B_{\sigma_0} \supset B_\lambda$ mit $B_{\sigma_0} \cap M = (0)$ und wegen (E_2) genügt B_{σ_0} der Minimalbedingung im Widerspruch zu der Tatsache, daß σ_0 Vorgänger der Limeszahl λ ist.

Übrigens ist (E_1) offenbar eine Folge von (E_2).

Die vorangegangenen Betrachtungen legen es nahe, Gruppen zu untersuchen, deren charakteristischer Filter aus großen Untergruppen besteht. Es ist klar, daß die vollständige Hülle solcher Gruppen linear-kompakt ist. Ferner gilt als Ergänzung von (2.3):

(5.6) *Ist A eine vollständige Gruppe, so sind folgende Aussagen gleichwertig:*

a) *A besitzt die Eigenschaft (O) aus Nr. 2.*

b) *Der charakteristische Filter von A besteht aus großen Untergruppen.*

Beweis. Aus a) folgt b). Ist nicht jede offene Untergruppe von A groß in A, dann gibt es in A einen offenen Normalteiler N, so daß $A = A/N$ nicht der Minimalbedingung genügt und in $\bar{A}$ existiert eine abgezählte Untergruppenkette $\bar{A}_1 \supset \bar{A}_2 \supset \cdots$ mit $\bigcap_i \bar{A}_i \neq \bar{A}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Für die entsprechenden Untergruppen $A_i \supset N$ von A gilt dann gleichfalls $\bigcap_i A_i \neq A_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ und $\bigcap_i A_i$ ist einerseits Durchschnitt des von den A_i erzeugten und aus allen Unter-

[11]) *Jede* diskrete Gruppe A besitzt nach dem Beweis von (5.4) die folgende Eigenschaft (E_1'): *Ist B eine Untergruppe von A, in welcher* (0) *G-Normalteiler ist und hat jede Untergruppe $\neq$ (0) von A mit B einen von* (0) *verschiedenen Durchschnitt, dann ist* (0) *G-Normalteiler von A.*

Wird in (E_1') der Begriff „G-Normalteiler" durch „großer Normalteiler" ersetzt, dann geht (E_1') in (E_1) über und es ergibt sich, daß die G-Normalteiler eine Eigenschaft [nämlich (E_1')] besitzen, die bisher meines Wissens für große Normalteiler [d.h. also (E_1)] noch nicht allgemein nachgewiesen ist.

gruppen $\geqq A_i$ bestehenden Filters, andererseits des wegen $\bigcap_i A_i \neq A_k$ davon verschiedenen aus allen Untergruppen $\geqq \bigcap_i A_i$ bestehenden Filters. Wegen (2.3) besitzt also A nicht die Eigenschaft (O). Aus b) folgt a): Wegen b) ist A linear-kompakt. Sei B eine abgeschlossene Untergruppe von A, $L^{(B)}$ der zugehörige Linksnebenscharenraum mit einer zulässigen Topologie (vgl. Nr. **2**), φ die natürliche Abbildung von A auf $L^{(B)}$. Nach (4.6) ist $\varphi(B) = \bar{0}$ abgeschlossen in $L^{(B)}$ und wegen der Zulässigkeit der Topologie von $L^{(B)}$ gibt es ein aus Bildern $\varphi(A_\beta)$ offener Untergruppen $A_\beta \supseteq B$ von A bestehendes Fundamentalsystem von Umgebungen der $\bar{0}$ in $L^{(B)}$. Sei nun $A' \supset B$ eine offene Untergruppe aus A. Wegen $\bigcap A_\beta = B$ und (2.3) gibt es dann ein A_β, etwa $A_{\beta'}$, mit $A_{\beta'} \subset A'$. Dann besteht A' aus gewissen Linksnebenscharen mod $A_{\beta'}$ und da die Bilder dieser Linksnebenscharen vermöge φ offen in $L^{(B)}$ sind, ist auch $\varphi(A')$ offen in $L^{(B)}$, w. z. z. w.

6. Eine diskrete Gruppe heißt bekanntlich lokal-endlich, wenn jede ihrer Untergruppen mit endlich vielen Erzeugenden endlich ist. Natürlich ist jede lokal-endliche Gruppe periodisch. Diese Erklärung läßt sich sofort verallgemeinern zu der

Definition. Eine Gruppe A mit dem von den Normalteilern N_ν erzeugten charakteristischen Filter heißt lokal-endlich, wenn die (diskreten!) Restklassengruppen A/N_ν sämtlich lokal-endlich sind.

Offenbar braucht eine in diesem Sinne lokal-endliche Gruppe nicht periodisch zu sein.

(6.1) *B sei ein abgeschlossener Normalteiler von A, $A' = A/B$. Ist A lokal-endlich, so auch B und A'. Sind A' und B lokal-endlich, so auch A.*

A sei lokal-endlich und der charakteristische Filter von A werde von dem Normalteiler N_ν erzeugt. Wegen der Isomorphie von $(N_\nu + B)/N_\nu$ und $B/B \cap N_\nu$ und da die $B \cap N_\nu$ den charakteristischen Filter von B erzeugen, folgt die lokale Endlichkeit von B aus der lokalen Endlichkeit von $(N_\nu + B)/N_\nu \subseteq A/N_\nu$. Ebenso leicht ergibt sich die lokale Endlichkeit von $A' = A/B$. Seien nun A' und B lokal-endlich, N_ν ein offener Normalteiler von A. Wegen $(N_\nu + B)/N_\nu = B/B \cap N_\nu$ ist dann $(N_\nu + B)/N_\nu$ und wegen $A/(N_\nu + B) = (A/B)/\big((N_\nu + B)/B\big)$ auch $A/(N_\nu + B)$ lokal-endlich.

Die diskrete Gruppe A/N_ν ist also isomorph zur Erweiterung der lokal-endlichen Gruppe $A/(N_\nu + B)$ durch die lokal-endliche Gruppe $(N_\nu + B)/N_\nu$ und mithin nach einem bekannten Satz lokal-endlich.

Definition. Eine lokal-endliche Gruppe A, deren charakteristischer Filter von den Normalteilern N_ν erzeugt wird, heißt lokal-auflösbar bzw. auflösbar bzw. lokal-speziell bzw. speziell, wenn die (diskreten) Restklassengruppen A/N_ν sämtlich die entsprechende Eigenschaft haben[12]).

Mit A ist auch die vollständige Hülle $\hat{A}$ von A lokal-auflösbar usw., wie sich sofort aus der Isomorphie von A/N_ν und $\hat{A}/\hat{N}_\nu$ ergibt (vgl. Nr. **1**). Ab-

[12]) Zu den auftretenden gruppentheoretischen Begriffsbildungen und Sätzen vgl. KUROSCH [8].

geschlossene Untergruppen und Restklassengruppen nach solchen sowie die TYCHONOFF-Summe von lokal-auflösbaren usw. Gruppen sind stets wieder lokal-auflösbar usw. Schließlich ist auch die Erweiterung einer lokal-auflösbaren Gruppe mit einer lokal-auflösbaren Gruppe lokal-auflösbar.

Im diskreten Falle fällt unsere Definition der lokalen Auflösbarkeit usw. mit der üblichen zusammen. Hingegen braucht z.B. eine nichtdiskrete in unserem Sinne lokal-auflösbare Gruppe nicht im üblichen Sinne lokal-auflösbar zu sein. Trotzdem lassen sich viele bei gewöhnlichen lokal-auflösbaren usw. Gruppen gültige Sätze in geeigneter Form auch auf unseren Fall übertragen. Mit Hilfe eines Satzes von ČERNIKOV [*11*], nach welchem eine diskrete lokal-auflösbare Gruppe genau dann der Minimalbedingung genügt, wenn ihre abelschen Untergruppen der Minimalbedingung genügen, zeigen wir zunächst

(6.2) *Die Gruppe A sei lokal-auflösbar, $\hat{A}$ die vollständige Hülle von A. Dann ist jeder G-Normalteiler von A groß in A und A besitzt die Eigenschaft* (E_1) *aus Nr.* **5**. *Ferner sind folgende Aussagen äquivalent*:

a) *$\hat{A}$ ist linear-kompakt.*

b) *Jede offene Untergruppe ist groß in A.*

Beweis. Sei N ein G-Normalteiler von A, $\bar{A}=A/N$. Dann ist $\bar{A}$ diskret und $\bar{0}$ ist G-Normalteiler von $\bar{A}$, also insbesondere auch G-Normalteiler aller abelschen Untergruppen von $\bar{A}$. Würden die abelschen Untergruppen von $\bar{A}$ nicht sämtlich der Minimalbedingung genügen, so gäbe es unter ihnen sicher eine, in welcher $\bar{0}$ nicht G-Normalteiler wäre (z.B. eine direkte Summe von abzählbar vielen zyklischen Gruppen), im Widerspruch zur Voraussetzung! Mithin genügen alle abelschen Untergruppen von $\bar{A}$ der Minimalbedingung und nach dem zitierten Satz von ČERNIKOV auch $\bar{A}$, d.h. N ist groß in A. — Sei nun A linear-kompakt, $\hat{N}_\nu$ ein offener Normalteiler von $\hat{A}$, $\bar{A}=\hat{A}/\hat{N}_\nu$. $\bar{A}$ ist diskret und linear-kompakt und das gleiche gilt folglich für alle abelschen Untergruppen von $\bar{A}$. Nach wohlbekannten Sätzen (vgl. z.B. SCHÖNEBORN [*10*]) genügen folglich die abelschen Untergruppen von $\bar{A}$ der Minimalbedingung, woraus nach dem Satz von ČERNIKOV folgt, daß $\hat{N}_\nu$ groß in $\hat{A}$ ist. — Ist umgekehrt b) erfüllt, so folgt a) sofort aus (4.3).

Durch (6.2) ist die Frage (F) aus Nr. 5 für lokal-auflösbare Gruppen bejahend beantwortet. Ferner folgt aus (6.2) nach bekannten Sätzen (vgl. KUROSCH [*8*]), daß für linear-kompakte Gruppen die Begriffe „auflösbar" und „lokal-auflösbar" ebenso wie die Begriffe „speziell" und „lokal-speziell" zusammenfallen.

Im folgenden sollen noch die nachstehenden von ČERNIKOV [*11*] für die Minimalbedingung genügende lokal-auflösbare Gruppen gewonnene Resultate auf linear-kompakte lokal-auflösbare Gruppen übertragen werden.

Genügt die lokal-auflösbare Gruppe A der Minimalbedingung, so gilt nach ČERNIKOV:

a) A besitzt einen abelschen Normalteiler von endlichem Index in A.

b) Ist A eine Divisionsgruppe[13]), so ist A abelsch.

c) Besitzt A keine unendliche Sylowuntergruppe, so ist A endlich.

Die Übertragung auf unseren Fall lautet:

(6.3) *Ist A lokal-auflösbar und linear-kompakt, so gilt*

A. *A enthält einen abgeschlossenen abelschen Normalteiler N mit kompakter Restklassengruppe A/N.*

B. *Ist A eine Divisionsgruppe, so ist A abelsch.*

C. *Ist jede Sylowuntergruppe von A kompakt, so auch A selber.*

Beweis. A. Sei $\bar{A}^{(\nu)} = A/N_\nu$, wo N_ν die offenen Normalteiler von A durchläuft. Dann enthält $\bar{A}^{(\nu)}$ nach a) einen abelschen Normalteiler $\bar{N}^{(\nu)}$ von endlichem Index. $N^{(\nu)}$ sei der $\bar{N}^{(\nu)} = N^{(\nu)}/N_\nu$ entsprechende (offene) Normalteiler aus A, $N = \cap N^{(\nu)}$, $A' = A/N$. Dann folgt wegen (6.2) aus der linearen Kompaktheit von A und A' nach (2.3), daß die Gruppen $N^{(\nu)'} = N^{(\nu)}/N$ den vollen charakteristischen Filter von A' erzeugen und aus der Endlichkeit von $A'/N^{(\nu)'} = \bar{A}^{(\nu)}/\bar{N}^{(\nu)}$ ergibt sich die Kompaktheit von A'. Wegen $N \subseteq N^{(\nu)}$, $N_\nu \subseteq N^{(\nu)}$ ist $N + N_\nu \subseteq N^{(\nu)}$ und mit $N^{(\nu)}/N_\nu$ ist auch $(N + N_\nu)/N_\nu$ abelsch. Da die Gruppen $N/N \cap N_\nu = (N + N_\nu)/N_\nu$ den charakteristischen Filter von N erzeugen, folgt A nach einer in Nr. 5 gemachten Bemerkung. — B. ist klar, da mit A auch A/N_ν eine Divisionsgruppe und also nach b) abelsch ist. — C. Sei N der abelsche Normalteiler aus A. mit kompaktem A/N. Die linear-kompakte abelsche Gruppe N ist nach bekannten Sätzen direkte TYCHONOFF-Summe ihrer p-Sylowgruppen und diese sind, da in geeigneten p-Sylowgruppen von A enthalten, kompakt. Mithin ist auch N kompakt und aus der Kompaktheit von A/N folgt sofort die von A.

Zum Schlusse wenden wir uns den lokal-speziellen Gruppen zu und bemerken zunächst, daß — wie leicht zu sehen — genau wie im diskreten Falle eine lokal-spezielle Gruppe A zu jeder Primzahl p höchstens eine p-Sylowgruppe $P \neq (0)$ enthält und daß P Normalteiler in A ist. Darüber hinaus gilt:

(6.4) *Eine linear-kompakte Gruppe A ist genau dann lokal-speziell (und damit speziell), wenn sie direkte* TYCHONOFF-*Summe ihrer verschiedenen p-Sylowgruppen ist und wenn diese sämtlich lokal-endlich sind.*

Beweis. Zunächst ist klar, daß eine direkte TYCHONOFF-Summe von lokal-endlichen linear-kompakten p-Gruppen lokal-speziell ist. — Sei nun umgekehrt A lokal-speziell und ${}^{(i)}P$ durchlaufe die verschiedenen p-Sylowgruppen von A. Dann enthält A zunächst die Gruppe A^* aller endlichen Summen $\sum {}^{(i)}a$ (${}^{(i)}a \in {}^{(i)}P$). Die durch die Topologie von A in A^* induzierte Relativtopologie wird definiert durch die in A^* offenen Normalteiler $N_\nu^* = A^* \cap N_\nu$ und A^*/N_ν^* genügt stets der Minimalbedingung. Daraus folgt leicht, daß die vollständige Hülle von A^* gerade die TYCHONOFF-Summe $\hat{A}^* = \sum^T \oplus {}^{(i)}P$ ist und wegen der Vollständigkeit von A ist $\sum^T \oplus {}^{(i)}P \subseteq A$. — Ist umgekehrt

[13]) Eine Gruppe ist eine „Divisionsgruppe" (auch „komplette Gruppe" genannt), wenn für jede natürliche Zahl $n > 0$ jedes ihrer Elemente in der Gruppe als n-te Potenz darstellbar ist.

$a \in A$ und (a) die in A abgeschlossene und daher vollständige Hülle der gewöhnlichen von a erzeugten zyklischen Gruppe, dann ist die abelsche Gruppe (a) kompakt und (a), wie wohlbekannt, darstellbar als direkte Summe $(a) = \sum^T \oplus ({}^{(i)}a)$, wo $({}^{(i)}a)$ „abgeschlossene Hüllen" zyklischer Gruppen aus ${}^{(i)}P$ sind. Hieraus folgt $(a) \subseteqq \underline{\sum}^T \oplus {}^{(i)}P$, $A \subseteqq \underline{\sum}^T \oplus {}^{(i)}P$ und damit die Behauptung.

Literatur.

[1] Bourbaki, N.: Topologie générale, Chap. I—III. Paris 1951. — [2] Hämisch, W.: Über die Topologie in der Algebra. Math. Z. **60**, 458—487 (1954). — [3] Hall jr., M.: A topology for free groups and related groups. Ann. of Math. **52**, 127—139 (1950). — [4] Kaplansky, I.: Dual modules over a valuation ring. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 213—219 (1953). — [5] Kawada, Y.: On the structure of the Galois groups of some infinite extensions I. J. Fac. Sc. Tokyo, Sec. I **7**, 1—18. — [6] Krull, W.: Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen. Math. Ann. **100**, 687—697 (1928). — [7] Krull, W.: Über separable, insbesondere kompakte separable Gruppen. J. f. Math. **184**, 19—48 (1942). — [8] Kurosch, A.: Gruppentheorie. Berlin 1953. — [9] Prüfer, H.: Theorie der abelschen Gruppen, II. Math. Z. **22**, 222—249 (1925). — [10] Schöneborn, H.: Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen I/II. Math. Z. **59**, 455—473 (1954); **60**, 17—30 (1954). — [11] Černikov, S. N.: Über die Theorie der lokal-auflösbaren Gruppen mit Minimalbedingung für Untergruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) **65**, 21—24 (1949). — [12] Vilenkin, N. Y.: Direkte Zerlegungen topologischer Gruppen I/II. Mat. Sbornik N. S., **19**, (61), 85—154, 311—340 (1946). — [13] Zelinsky, D.: Linearly compact modules and rings. Amer. J. Math. **75**, 79—90 (1953).

Bonn, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 18. August 1954.)

Krickeberg, K.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 374—385 (1955)

Charakterisierung oberer und unterer Integrale durch Additivitäts- und Mittelwerteigenschaften*).

Von
Klaus Krickeberg.

Einleitung.

Von Hans Hahn rührt die Definition des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals einer reellen meßbaren Funktion als diejenige totaladditive Mengenfunktion her, die den Mittelwertsatz erfüllt. Da das obere und das untere Integral einer beliebigen, nicht notwendig meßbaren reellen Funktion, soweit sie im Sinne von [*I*][1]) existieren, ebenfalls totaladditive Mengenfunktionen bilden, die dem Mittelwertsatz genügen, so liegt die Frage nahe, ob sich nicht auch diese Integrale in ähnlicher Weise kennzeichnen lassen. Es zeigt sich in der Tat leicht (Satz 1.2), daß das obere Integral, falls vorhanden, als die größte derartige Mengenfunktion beschrieben werden kann und dementsprechend das untere Integral als die kleinste. Das Hauptproblem der vorliegenden Arbeit besteht nun in der Frage, unter welchen Bedingungen umgekehrt die Existenz des oberen Integrals aus dem Vorhandensein einer größten unter den totaladditiven Mengenfunktionen, die den Mittelwertsatz oder doch wenigstens seine eine Hälfte, die Abschätzung nach oben, erfüllen, abgeleitet werden kann, wann sich also die oberen und unteren Integrale auf diese Weise völlig charakterisieren lassen. Die Beantwortung dieser Frage liefert demnach Bedingungen, unter denen die Theorie des oberen und unteren Integrals in entsprechender Weise wie die des Lebesgue-Stieltjesschen Integrals meßbarer Funktionen axiomatisch aufgebaut werden kann.

Die Bedingung II, die dafür in Satz 2.1 aufgestellt wurde, sieht in der Sprache der Verbände, die ich sonst hier ebenso wie in der vorangegangenen Arbeit [*I*] um des allgemeineren Verständnisses willen vermieden habe, so aus: *Zu jedem* Booleschen *σ-Quotientenverband* $\mathfrak{V}$ *des Quotientenverbandes* $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}/\mathfrak{N}$ *der meßbaren Mengen nach den Nullmengen und jedem vom Nullelement verschiedenen Element* X *aus* $\mathfrak{V}$ *gibt es ein in* $\mathfrak{V}$ *erklärtes endliches Maß, das an der Stelle* X *nicht verschwindet.* Hierfür ist hinreichend, aber nicht notwendig, daß $\mathfrak{V}$ einen Maßverband darstellt, d. h. den Definitionsbereich eines endlichen und strikt positiven Maßes.

Hiernach ist, anders als bei den Integralen meßbarer Funktionen, eine entsprechende axiomatische Kennzeichnung der oberen und unteren Integrale

*) Von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Würzburg als Habilitationsschrift angenommen.

[1]) Zahlen in eckigen Klammern weisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit hin.

durchaus nicht immer möglich. Die Untersuchungsmethode führt jedoch auch im Fall der meßbaren Integranden zu neuen Einsichten, z. B. dem Satz 2.4. Die Bedeutung der Bedingung II wird in § 3 durch einige Beispiele beleuchtet.

Es sei schließlich auf eine Arbeit von M. Cotlar und Y. Frenkel [4] hingewiesen, die sich unter anderem ebenfalls mit der Charakterisierung von Integralen vermöge gewisser Ordnungsrelationen im System aller Mengenfunktionen über einem Mengensystem $\mathfrak{S}$ beschäftigt. Es werden allgemeiner sogar Integrale von Mengenfunktionen vom Burkill-Kolmogoroffschen Typ behandelt. Das eigentliche Problem der vorliegenden Arbeit, das Existenzproblem, taucht in jener Abhandlung jedoch nicht auf, da dort alle vorkommenden Integrale auf Grund geeigneter Endlichkeitsvoraussetzungen vorhanden sind.

§ 1. Vorbereitungen.

Wir stützen uns auf den Begriff des oberen und unteren Integrals aus [1] und gebrauchen die dort eingeführten Bezeichnungen. μ sei ein in einem Borelschen Ring $\mathfrak{S}$ definiertes Maß und $\mathfrak{N}$ das System der meßbaren, d.h. zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Nullmengen. $\mathfrak{S}$ enthalte eine größte Menge E, die den Definitionsbereich einer reellen, nicht notwendig endlichen Funktion f bilde. Ist f meßbar, so heißt f bekanntlich über E integrierbar im Sinne von Hahn (vgl. z.B. [2], S. 149ff.), wenn es eine in $\mathfrak{S}$ totaladditive Mengenfunktion φ gibt, mit der der Mittelwertsatz

$$\mu(M)\inf_M f \leq \varphi(M) \leq \mu(M)\sup_M f \tag{1.1}$$

für jede Menge M aus $\mathfrak{S}$ gilt. φ ist, falls vorhanden, eindeutig bestimmt, und $\varphi(M)$ wird als das Integral von f über M bezeichnet. Ein Nebenergebnis der folgenden Überlegungen wird die Gleichwertigkeit dieses Hahnschen Integralbegriffs mit dem in [1], § 6 gegebenen sein, und zwar auch dann, wenn μ, anders als in [2], nicht mehr schwach endlich ist.

Wir beginnen die Untersuchung der Verhältnisse bei nicht mehr notwendig meßbarem f mit der Beantwortung der Frage, wann es mindestens eine totaladditive Funktion φ gibt, die (1.1) erfüllt.

Satz 1.1. *Dann und nur dann gibt es eine in $\mathfrak{S}$ totaladditive Mengenfunktion φ, die dem Mittelwertsatz* (1.1) *bei jeder Menge M aus $\mathfrak{S}$ genügt, wenn ${}^*\int_E f\,d\mu$ oder ${}_*\int_E f\,d\mu$ existiert.*

Beweis. Oberes und unteres Integral sind totaladditiv und erfüllen (1.1) nach [1], Satz 5.5 und 5.7. Es habe andererseits φ diese Eigenschaften, und es sei etwa $\varphi(E) < +\infty$. Ist dann $\mathfrak{X}$ eine Zerlegung von E, so folgt aus der unbedingten Konvergenz der Reihe $\varphi(E) = \sum_{X\in\mathfrak{X}} \varphi(X)$ und aus $\mu(X)\inf_X f \leq \varphi(X)$ nach [1], Satz 1.1 die Existenz von $\sigma_*(f, \mathfrak{X})$ und damit die von ${}_*\int_E f\,d\mu$.

Ist weder ${}_*\int_E f\,d\mu$ noch ${}^*\int_E f\,d\mu$ vorhanden, so gibt es doch stets eine totaladditive Funktion φ, die die eine Hälfte

$$\varphi(M) \leq \mu(M) \sup_M f \tag{1.2}$$

des Mittelwertsatzes für jedes M aus $\mathfrak{S}$ erfüllt, z.B. $\varphi(O)=0$, $\varphi(M)=-\infty$, falls $M \in \mathfrak{S}-\{O\}$, oder auch $\varphi(M)=0$, wenn $M \in \mathfrak{N}$, $\varphi(M)=-\infty$, wenn $M \in \mathfrak{S}-\mathfrak{N}$. Ebenso kann die andere Hälfte $\mu(M) \inf_M f \leq \varphi(M)$ immer befriedigt werden. Um nun unter diesen Funktionen φ das obere oder untere Integral zu kennzeichnen, führen wir im System aller in $\mathfrak{S}$ definierten reellen Funktionen die (Halb-)Ordnung „$\varphi \leq \psi$, wenn $\varphi(M) \leq \psi(M)$ für jedes M aus $\mathfrak{S}$" ein. Der Einfachheit halber betrachten wir nur das obere Integral.

Satz 1.2. *Existiert* ${}^*\int_E f\,d\mu$, *so bildet die in* $\mathfrak{S}$ *durch* $\varphi_0(M) = {}^*\int_M f\,d\mu$ *definierte Funktion* φ_0 *die größte unter den in* $\mathfrak{S}$ *totaladditiven Mengenfunktionen* φ, *die* (1.2) *bei jeder Menge* M *aus* $\mathfrak{S}$ *erfüllen, also auch die größte unter denen, die* (1.1) *erfüllen.*

Beweis. φ_0 ist totaladditiv und befriedigt (1.1) und (1.2). Ist φ eine weitere in $\mathfrak{S}$ totaladditive Funktion, die (1.2) erfüllt, und $\mathfrak{X}$ eine Zerlegung einer Menge M aus $\mathfrak{S}$, die eine Obersumme von f erzeugt, so gilt

$$\varphi(M) = \sum_{X \in \mathfrak{X}} \varphi(X) \leq \sum_{X \in \mathfrak{X}} \mu(X) \sup_X f = \sigma^*(f, \mathfrak{X}),$$

also $\varphi(M) \leq {}^*\int_M f\,d\mu = \varphi_0(M)$ und damit $\varphi \leq \varphi_0$.

Die Sätze 1.1 und 1.2 und der Satz 6.1 aus [*1*] zeigen nun, daß es zu einer meßbaren Funktion f höchstens eine totaladditive Mengenfunktion φ gibt, mit der der Mittelwertsatz (1.1) gilt, und daß die HAHNschen Begriffe der Integrierbarkeit und des Integrals meßbarer Funktionen dasselbe liefern wie die aus [*1*], § 6.

Zur Definition des oberen Integrals nicht notwendig meßbarer Funktionen läßt sich der Satz 1.2 allerdings nicht immer verwenden, denn es kann, wie wir bald sehen werden, durchaus vorkommen, daß es unter den totaladditiven Funktionen φ, die der Ungleichung (1.2) genügen, eine größte φ_0 gibt, ohne daß ${}^*\int_E f\,d\mu$ existiert. Wir wollen daher zunächst notwendige Bedingungen dafür ableiten, daß mit φ_0 auch ${}^*\int_E f\,d\mu$ vorhanden ist.

Satz 1.3. *Bei jeder reellen in* E *erklärten Funktion* f *folge die Existenz von* ${}^*\int_E f\,d\mu$ *aus der Existenz einer größten unter den in* $\mathfrak{S}$ *totaladditiven Mengenfunktionen* φ, *die* (1.2) *für jedes* M *aus* $\mathfrak{S}$ *erfüllen. Dann gibt es zu jedem* K *aus* $\mathfrak{S}-\mathfrak{N}$ *ein in* $\mathfrak{S}$ *definiertes endliches Maß* λ, *so daß* $\lambda(N)=0$ *für jedes* N *aus* $\mathfrak{N}$, *aber* $\lambda(K)>0$ *gilt.*

Beweis. Wir unterscheiden die beiden folgenden Fälle:

1. K läßt sich nicht in zwei zueinander fremde Mengen aus $\mathfrak{S}-\mathfrak{N}$ zerlegen.

2. Es gibt eine Zerlegung $K=P\cup Q$ mit $P\cap Q=O$ und $P,\ Q\in\mathfrak{S}-\mathfrak{N}$.

Im ersten Fall hat offenbar das folgende Maß λ die verlangten Eigenschaften: $\lambda(X)=0$, wenn $X\cap K\in\mathfrak{N}$, und $\lambda(X)=1$, wenn $X\cap K\in\mathfrak{S}-\mathfrak{N}$. Im zweiten Fall betrachten wir die Funktion

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{wenn} \quad x\in E-K,\\ -\infty, & \text{wenn} \quad x\in Q,\\ +\infty, & \text{wenn} \quad x\in P.\end{cases}$$

f ist zwar meßbar, aber nicht integrierbar über E. Ferner ist $\psi(M)=-\int\limits_M f^-\,d\mu$ in $\mathfrak{S}$ totaladditiv und es gilt $-\psi(M)\geq\mu(M)\inf\limits_M(f^-)$, also wegen [1], (1.11) auch

$$\psi(M)\leq-\mu(M)\left(\sup_M f\right)^-\leq\mu(M)\sup_M f.$$

Daher gibt es nach Voraussetzung eine totaladditive Funktion φ, die ebenfalls die Ungleichung (1.2) für jedes M aus $\mathfrak{S}$ erfüllt, und eine Menge L mit

$$\psi(L)<\varphi(L). \tag{1.3}$$

Nach Wahl von f und ψ gilt $\psi(M)=\mu(M)\sup\limits_M f$ für jede zu $\mathfrak{S}$ gehörige Teilmenge M von $E-K$ oder von Q, so daß aus (1.2) und aus

$$\begin{aligned}\psi\left(L\cap(E-K)\right)+\psi(L\cap Q)+\psi(L\cap P)&=\psi(L)\\ &<\varphi(L)=\varphi\left(L\cap(E-K)\right)+\varphi(L\cap Q)+\varphi(L\cap P)\end{aligned}$$

die Ungleichung $\psi(L\cap P)<\varphi(L\cap P)$ folgt. Infolgedessen können wir L sogar als Teilmenge von P bestimmen.

Wir definieren nun λ als die positive Variation von φ (vgl. z.B. [1], S. 96), also $\lambda=\overline{\varphi}$. Ist $N\in\mathfrak{N}$, so erhalten wir $\varphi(M)\leq 0$ nach (1.2) für jede Menge M aus $N\cap\mathfrak{S}$, also $\lambda(N)=0$. Aus (1.2) folgt ferner $\varphi(Q)=-\infty$, so daß λ endlich bleiben muß. Aus (1.3) und $\psi(L)=0$ ergibt sich schließlich wegen $L\subseteq K$ die letzte Behauptung $\lambda(K)>0$.

§ 2. Die Hauptsätze.

Wir wollen den Fall betrachten, in dem die fragliche Charakterisierung des oberen Integrals bei festgehaltenem $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}$ bei jeder in E definierten reellen Funktion f und jedem in $\mathfrak{S}$ erklärten Maß ν, das in $\mathfrak{N}$ verschwindet, möglich ist. $\mathfrak{S}$ sei wiederum ein Borelscher Ring mit einer größten Menge E und $\mathfrak{N}$ ein Borelsches Ideal in $\mathfrak{S}$, d.h. ein in $\mathfrak{S}$ enthaltener Borelscher Ring, dem mit jeder Menge N auch jede in $\mathfrak{S}$ liegende Teilmenge von N angehört. Ist ν ein Maß in $\mathfrak{S}$, so bildet das System $\mathfrak{N}_\nu$ aller Mengen M aus $\mathfrak{S}$ mit $\nu(M)=0$ ebenfalls ein Borelsches Ideal in $\mathfrak{S}$. Andererseits gibt es zu jedem Borelschen Ideal $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{S}$ ein Maß ν mit $\mathfrak{N}_\nu=\mathfrak{J}$, z.B. $\nu(M)=0$, wenn $M\in\mathfrak{J}$, und $\nu(M)=+\infty$, wenn $M\in\mathfrak{S}-\mathfrak{J}$.

Satz 2.1. *Die beiden folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

I. Für jedes in $\mathfrak{S}$ definierte Maß ν mit $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{N}_\nu$ und jede in E erklärte reelle Funktion f gilt: gibt es unter den in $\mathfrak{S}$ totaladditiven Mengenfunktionen φ, die der Ungleichung

$$\varphi(M) \leq \nu(M) \sup_M f \tag{2.1}$$

für jedes M aus $\mathfrak{S}$ genügen, eine größte, so existiert $^*\int_E f\, d\nu$.

II. Zu jedem BORELschen *Ideal $\mathfrak{J}$ in $\mathfrak{S}$, das $\mathfrak{N}$ umfaßt, und jeder Menge K aus $\mathfrak{S} - \mathfrak{J}$ gibt es ein in $\mathfrak{S}$ erklärtes endliches Maß λ, so daß zwar $\lambda(I) = 0$ für jedes I aus $\mathfrak{J}$, hingegen $\lambda(K) > 0$ wird.*

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{J}$ ein BORELsches, $\mathfrak{N}$ umfassendes Ideal in $\mathfrak{S}$, so gibt es, wie eben gezeigt, in $\mathfrak{S}$ ein Maß ν mit $\mathfrak{N}_\nu = \mathfrak{J}$. Hiernach und nach Satz 1.3 folgt II aus I.

2. Im Beweis dafür, daß I aus II folgt, können wir uns auf ein spezielles Maß ν mit $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\nu$ beschränken. Unter den in $\mathfrak{S}$ totaladditiven Funktionen φ, die (2.1) erfüllen, gebe es eine größte φ_0. Nach [1], Satz 5.8 dürfen wir, um zu zeigen, daß $^*\int_E f\, d\nu$ existiert, $^*\int_E f^-\, d\nu = +\infty$ voraussetzen und brauchen nur die Ungleichung

$$^*\int_E f^+\, d\nu < +\infty \tag{2.2}$$

zu beweisen.

3. Nach [1], (5.1) und [1], § 5, Hilfssatz 5 gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{X}$ von E mit $\sum_{X \in \mathfrak{X}} \nu(X) \left(\sup_X f\right)^- = +\infty$. Nach Voraussetzung ist ferner

$$\varphi_0(X) \leq \nu(X) \sup_X f \tag{2.3}$$

für jedes X aus $\mathfrak{S}$, also $\varphi_0(X)^- \geq \nu(X) \left(\sup_X f\right)^-$, so daß $\sum_{X \in \mathfrak{X}} \varphi_0(X)^- = +\infty$ und damit $\varphi_0(E) = \sum_{X \in \mathfrak{X}} \varphi_0(X) = -\infty$ wird. Folglich gilt

$$\varphi_0(M) < +\infty \tag{2.4}$$

für jedes M aus $\mathfrak{S}$.

4. Eine Menge M aus $\mathfrak{S}$ sei so beschaffen, daß $^*\int_M f\, d\nu$ existiert. Aus Satz 1.2, angewandt auf $M \cap \mathfrak{S}$ statt auf $\mathfrak{S}$, folgt dann $\varphi_0(M) \leq {}^*\int_M f\, d\nu$. Ist nun $^*\int_M f\, d\nu < +\infty$, so bildet

$$\varphi(X) = \varphi_0(X - M) + {}^*\int_{X \cap M} f\, d\nu$$

auf Grund von (2.4) eine in $\mathfrak{S}$ totaladditive Funktion, die wegen

$$\varphi_0(X - M) \leq \nu(X - M) \sup_{X-M} f \leq \nu(X - M) \sup_X f,$$

$$^*\int_{X \cap M} f\, d\nu \leq \nu(X \cap M) \sup_{X \cap M} f \leq \nu(X \cap M) \sup_X f$$

und $\nu(X-M)\sup_X f+\nu(X\cap M)\sup_X f=\nu(X)\sup_X f$ auch noch (2.1) erfüllt. Infolgedessen gilt $\varphi\leqq\varphi_0$, insbesondere $\varphi(M)\leqq\varphi_0(M)$, d.h. ${}^*\int_M f\,d\nu\leqq\varphi_0(M)$, also ${}^*\int_M f\,d\nu=\varphi_0(M)$.

5. Wir zerlegen E in zwei zueinander fremde Mengen P und Q aus $\mathfrak{S}$ derart, daß $\varphi_0(P)=\max_{X\in\mathfrak{S}}\varphi_0(X)$ und $\varphi_0(Q)=\min_{X\in\mathfrak{S}}\varphi_0(X)$ wird, also $-\infty=\varphi_0(Q)\leqq\varphi_0(X)\leqq 0$ für jedes X aus $Q\cap\mathfrak{S}$ und $0\leqq\varphi_0(X)\leqq\varphi_0(P)<+\infty$ für jedes X aus $P\cap\mathfrak{S}$.

6. Ist $X\in P\cap\mathfrak{S}$ und $\nu(X)>0$, so gilt wegen (2.3): $\sup_X f\geqq 0$, also nach [1], (1.11): $\sup_X f=(\sup_X f)^+=\sup_X(f^+)$. Somit ist ${}^*\int_M f\,d\nu$ für jede Menge M aus $P\cap\mathfrak{S}$ vorhanden und

$$(2.5)\qquad {}^*\int_M f\,d\nu={}^*\int_M f^+\,d\nu.$$

Aus (2.4) und aus dem unter 4. Bewiesenen folgt daher, daß die in $\mathfrak{S}$ durch

$$(2.6)\qquad \varrho(M)={}^*\int_{M\cap P} f\,d\nu-\varphi_0(M\cap P)$$

definierte Funktion ϱ ein Maß darstellt und nur die Werte 0 und $+\infty$ annimmt. Zugleich gilt $\mathfrak{N}\subseteqq\mathfrak{N}_\varrho\subseteqq\mathfrak{S}$. Wäre nun $P\in\mathfrak{S}-\mathfrak{N}_\varrho$, so existierte nach Voraussetzung ein endliches Maß λ mit $\lambda(P)>0$, das in $\mathfrak{N}_\varrho$ verschwände. Die Funktion $\varphi=\varphi_0+\lambda$ wäre daher in $\mathfrak{S}$ totaladditiv, fiele in $Q\cap\mathfrak{S}$ mit φ_0 zusammen und erfüllte für jedes M aus $P\cap\mathfrak{S}$ die Ungleichung $\varphi(M)\leqq{}^*\int_M f\,d\nu$, da deren rechte Seite gleich $+\infty$ wäre, sobald die linke φ_0 überträfe. Hieraus und aus (2.3) folgte die Abschätzung (2.1) ähnlich wie in Teil 4 des Beweises für jedes M aus $\mathfrak{S}$ im Widerspruch zur Definition von φ_0 und zu $\varphi_0(P)<\varphi(P)$. Somit ist $P\in\mathfrak{N}_\varrho$, d.h. $\varrho(P)=0$, also wegen (2.4) bis (2.6):

$${}^*\int_P f^+\,d\nu={}^*\int_P f\,d\nu=\varphi_0(P)<+\infty.$$

7. In ganz ähnlicher Weise läßt sich nun ${}^*\int_Q f^+\,d\nu=0$ und damit die Behauptung (2.2) beweisen. Ist $M\in Q\cap\mathfrak{S}$ und ${}^*\int_M f^+\,d\nu<+\infty$, so existiert ${}^*\int_X f\,d\nu$ für jede Menge X aus $M\cap\mathfrak{S}$ und ist kleiner als $+\infty$. Nach Teil 4 des Beweises wird daher ${}^*\int_X f\,d\nu=\varphi_0(X)\leqq 0$ für jedes X aus $M\cap\mathfrak{S}$, woraus nach [1], Satz 5.8 folgt ${}^*\int_M f^+\,d\nu=\overline{{}^*\int_M} f\,d\nu=0$. Die in $\mathfrak{S}$ totaladditive Mengenfunktion $\sigma(M)={}^*\int_{M\cap Q} f^+\,d\nu$ nimmt also nur die Werte 0 und $+\infty$ an. Wäre nun $\sigma(Q)>0$, so existierte in $\mathfrak{S}$ ein endliches Maß λ mit $\lambda(Q)>0$ und $\lambda(M)=0$ für jedes M aus $\mathfrak{N}_\sigma$. Die Funktion $\varphi=\varphi_0+\lambda$ wäre in $\mathfrak{S}$ totaladditiv und die Abschätzung (2.1) folgte im Fall $\lambda(M)=0$ aus (2.3). Im Fall $\lambda(M)>0$ hingegen wäre

$*\int_M f^+ d\nu = +\infty$, also $\nu(M)\left(\sup_M f\right)^+ = \nu(M)\sup_M (f^+) = +\infty$ und damit auch $\nu(M)\sup_M f = +\infty$, so daß wiederum (2.1) gälte. Mithin müßte $\varphi \leqq \varphi_0$ sein im Widerspruch zu $\varphi(Q) > \varphi_0(Q)$.

Satz 2.2. *$\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}$ erfüllen die Bedingung II aus Satz 2.1 sicher dann, wenn es ein schwach endliches in $\mathfrak{S}$ definiertes Maß μ mit $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\mu$ gibt.*

Beweis. In diesem Fall existiert in $\mathfrak{S}$ offenbar auch ein endliches Maß μ' mit $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\mu'}$, z. B.

$$\mu'(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\mu(X \cap A_i)}{\mu(A_i)},$$

wenn (A_i) eine Folge aus $\mathfrak{S}$ mit $0 < \mu(A_i) < +\infty$ und $E = \bigcup_i A_i$ bedeutet. Die Funktion $\varkappa(X) = 0$, wenn $X \in \mathfrak{J}$, und $\varkappa(X) = +\infty$, wenn $X \in \mathfrak{S} - \mathfrak{J}$, ist totaladditiv und μ'-stetig, läßt sich also nach dem RADON-NIKODYMschen Satz (vgl. z. B. [2], S. 169) in der Gestalt $\varkappa(X) = \int_X g\, d\mu'$ mit einer in E erklärten nichtnegativen μ'-meßbaren Funktion g darstellen. Setzen wir $h(x) = 0$, wenn $g(x) = 0$, und $h(x) = 1$, falls $g(x) > 0$ ist, so bildet $\lambda(X) = \int_X h\, d\mu'$ sogar ein endliches Maß λ mit $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}_\lambda$.

Kehren wir nun zum Ausgangspunkt, einem festen Maß μ mit $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\mu$ und einer festen in E erklärten Funktion f zurück, so erhalten wir insbesondere den

Satz 2.3. *Ist μ schwach endlich und gibt es unter den in $\mathfrak{S}$ totaladditiven Mengenfunktionen φ, die (1.2) bei jeder Menge M aus $\mathfrak{S}$ erfüllen, eine größte, so existiert $*\int_E f\, d\mu$.*

Der direkte Beweis dieses Satzes wäre etwas einfacher als der Umweg über die Sätze 2.1 und 2.2. Wir wollen jedoch auf ihn verzichten und statt dessen die folgende, nicht unmittelbar aus Satz 2.1 ableitbare Feststellung direkt verifizieren, wobei das Beweisprinzip ebenfalls hervortritt.

Satz 2.4. *Ist μ schwach endlich, so existiert dann und nur dann genau eine in $\mathfrak{S}$ totaladditive Mengenfunktion φ, die dem Mittelwertsatz (1.1) bei jeder Menge M aus $\mathfrak{S}$ genügt, wenn f fast meßbar[2]) und integrierbar über E ist.*

Beweis. Ist f fast meßbar, so existiert, wie im Anschluß an Satz 1.2 festgestellt, höchstens eine Funktion φ mit den fraglichen Eigenschaften, und aus der Integrierbarkeit von f folgt, daß es mindestens eine gibt.

Wir setzen nun umgekehrt voraus, es gebe genau eine, φ_0, und es sei etwa

$$\varphi_0(E) < +\infty. \tag{2.7}$$

Wie im Beweis zu Satz 1.1 gezeigt, ist dann $*\int_E f\, d\mu$ vorhanden. Nach [1], Satz 6.3 brauchen wir daher, um die Fastmeßbarkeit und Integrierbarkeit von f zu erhalten, nur noch die Existenz von $*\int_E f\, d\mu$ zu beweisen.

[2]) Vgl. [1], S. 110.

P sei eine meßbare Hülle der Menge $\{x: f(x) > 0\}$ im engeren Sinne und $Q = E - P$. Aus $f(x) \leqq 0$ für jedes x aus Q folgt

$$(2.8) \qquad {}^*\int_Q f^+ \, d\mu = 0.$$

Da ferner keine in P enthaltene Menge X aus $\mathfrak{S} - \mathfrak{N}$ fremd zu $\{x: f(x) > 0\}$ sein kann, so wird $\sup_X f > 0$ für jede derartige Menge X, woraus bei beliebigem M aus $P \cap \mathfrak{S}$ die Existenz von ${}^*\int_M f \, d\mu$ und die Gleichung

$$(2.9) \qquad {}^*\int_M f \, d\mu = {}^*\int_M f^+ \, d\mu$$

folgen.

Bedeutet $\overline{\varphi}_0$ die positive Variation von φ_0, so bildet $\varphi(M) = \varphi_0(M \cap Q) + \overline{\varphi}_0(M \cap P)$ wegen (2.7) in $\mathfrak{S}$ eine totaladditive Funktion, die wegen $\varphi_0 \leqq \varphi$ die erste Hälfte des Mittelwertsatzes (1.1) erfüllt. Um zu zeigen, daß φ auch die zweite Hälfte von (1.1) erfüllt, genügt es auf Grund des gleichen Schlusses wie in Teil 4 des Beweises zu Satz 2.1, allein die Fälle $M \leqq Q$ und $M \leqq P$ zu betrachten. Im ersten Fall ist aber $\varphi(M) = \varphi_0(M)$. Im zweiten Fall gilt für jede in M enthaltene Menge X aus $\mathfrak{S}$ mit $\mu(X) > 0$ die Ungleichung $\sup_X f > 0$, also $\varphi_0(X) \leqq \mu(X) \sup_X f \leqq \mu(M) \sup_X f \leqq \mu(M) \sup_M f$, was natürlich auch im Fall $\mu(X) = 0$ richtig bleibt. Daher ist $\varphi(M) = \overline{\varphi}_0(M) \leqq \mu(M) \sup_M f$. Nach Definition von φ_0 muß also $\varphi_0 = \varphi$, d.h. $\varphi_0(P) = \varphi(P) = \overline{\varphi}_0(P)$, insbesondere

$$(2.10) \qquad 0 \leqq \varphi_0(P)$$

sein.

Nach Satz 1.2, angewandt auf $P \cap \mathfrak{S}$ statt auf $\mathfrak{S}$, gilt $\varphi_0(M) \leqq {}^*\int_M f \, d\mu$ für jedes M aus $P \cap \mathfrak{S}$. Ist ${}^*\int_M f \, d\mu < +\infty$, so wird $\varphi(X) = \varphi_0(X - M) + {}^*\int_{X \cap M} f \, d\mu$ wegen (2.7) wieder totaladditiv in $\mathfrak{S}$, und der gleiche Schluß wie eben zeigt, daß φ auch dem Mittelwertsatz (1.1) genügt. Somit muß $\varphi = \varphi_0$, insbesondere $\varphi(M) = \varphi_0(M)$, d.h. ${}^*\int_M f \, d\mu = \varphi_0(M)$ sein. Daher nimmt die wegen (2.7) und (2.9) in $\mathfrak{S}$ totaladditive Funktion $\varrho(M) = {}^*\int_{M \cap P} f \, d\mu - \varphi_0(M \cap P)$ nur die Werte 0 und $+\infty$ an und es gilt $\mathfrak{N} \leqq \mathfrak{N}_\varrho \leqq \mathfrak{S}$. Ist λ ein endliches, in $\mathfrak{N}_\varrho$ verschwindendes Maß, so erfüllt $\varphi = \varphi_0 + \lambda$ die zweite Hälfte der Abschätzungen (1.1), aber wegen $\varphi \geqq \varphi_0$ natürlich auch die erste, so daß $\varphi = \varphi_0$, d.h. wegen (2.7) und (2.10) $\lambda(P) = 0$ sein muß. Dies kann nach Satz 2.2 nur dann auf jedes derartige λ zutreffen, wenn $P \in \mathfrak{N}_\varrho$, d.h. $\varrho(P) = 0$ und damit wegen (2.9) auch

$$(2.11) \qquad {}^*\int_P f^+ \, d\mu = \varphi_0(P) < +\infty$$

gilt. Aus (2.8) und (2.11) folgt die Existenz von ${}^*\int_E f \, d\mu$.

Der hiermit bewiesene Satz 2.4 läßt sich als eine Rechtfertigung der der HAHNschen Integraldefinition zugrunde gelegten Annahme der Meßbarkeit des Integranden auffassen.

§ 3. Beispiele.

Die folgenden Beispiele sollen erkennen lassen, warum der Hauptsatz dieser Arbeit, der Satz 2.1, in einer so komplizierten Formulierung gegeben wurde, in der gleichzeitig alle $\mathfrak{N}$ enthaltenden BORELschen Ideale in $\mathfrak{S}$ und alle in $\mathfrak{S}$ definierten und in $\mathfrak{N}$ verschwindenden Maße vorkommen. Wir werden zunächst zeigen, daß sich der Satz 1.3 nicht umkehren läßt, d.h. daß bei festem μ mit $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_\mu$ die Bedingung:

II'. Zu jedem K aus $\mathfrak{S}-\mathfrak{N}$ gibt es ein endliches in $\mathfrak{N}$ verschwindendes Maß λ mit $\lambda(K)>0$

zur gewünschten Charakterisierung der oberen Integrale bezüglich μ nicht hinreicht. Sodann werden wir beweisen, daß andererseits die stärkere Bedingung II aus Satz 2.1 bei festem μ nicht notwendig für diese Charakterisierung ist. Schließlich soll dargetan werden, daß die in Satz 2.2 betrachtete Bedingung, es gebe in $\mathfrak{S}$ ein schwach endliches Maß μ mit $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_\mu$, wirklich stärker als die Bedingung II ist.

Zur Konstruktion des *ersten Beispiels* nehmen wir zwei zueinander fremde Mengen P und W der Mächtigkeit $\aleph_1$, ein nicht in $P\cup W$ liegendes Element q und eine eineindeutige Abbildung h von P auf W und setzen $E=P\cup W\cup\{q\}$. Es sei $\mathfrak{T}$ der BORELsche Ring aller Teilmengen von $P\cup W$, die sich in der Gestalt $X\cup h(X)$ mit $X\subseteq P$ darstellen lassen, und $\mathfrak{S}$ der BORELsche Ring aller Teilmengen M von E, zu denen es eine Menge T aus $\mathfrak{T}$ gibt, so daß die symmetrische Differenz $M\triangle T$ höchstens abzählbar ist. Offenbar gilt $E\in\mathfrak{S}$, und $\mathfrak{S}$ enthält alle höchstens abzählbaren Teilmengen von E.

Wir betrachten nun ein endliches in $\mathfrak{S}$ erklärtes Maß $\varkappa$, das auf jeder einelementigen und damit auf jeder abzählbaren Teilmenge von E verschwindet. Sind X und Y zwei zueinander fremde Teilmengen von P, so sind $X\cup h(X)$ und $Y\cup h(Y)$ zwei zueinander fremde und in $\mathfrak{T}$ liegende Teilmengen von E, und infolgedessen bildet die Funktion $\varrho(X)=\varkappa\big(X\cup h(X)\big)$ im Bereich aller Teilmengen von P ein endliches Maß, das auf jeder abzählbaren Teilmenge von P den Wert Null annimmt. Daher folgt nach einem Satz von ULAM [3] aus der Voraussetzung, P habe die Mächtigkeit $\aleph_1$, die Gleichung $\varrho=0$ und damit $\varkappa(T)=0$ für jede Menge T aus $\mathfrak{T}$. Benutzen wir noch einmal, daß $\varkappa$ auf jeder abzählbaren Menge den Wert Null annimmt, so erhalten wir sogar $\varkappa(M)=0$ für jedes M aus $\mathfrak{S}$.

In $\mathfrak{S}$ definieren wir jetzt $\mu(M)=0$, wenn $M\subset P$, und sonst $\mu(M)=+\infty$, so daß $\mathfrak{N}=\mathfrak{N}_\mu$ aus allen höchstens abzählbaren Teilmengen von P besteht. Die reelle Funktion

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{wenn } x\in W\\ 1, & \text{wenn } x\in P\\ -1, & \text{wenn } x=q,\end{cases}$$

hat dann kein oberes Integral; einerseits ist nämlich ${}_*\int_E f^-\,d\mu = \mu(\{q\}) = +\infty$, andererseits ${}^*\int_E f^+\,d\mu = +\infty$, weil jede Zerlegung von E wegen $P \notin \mathfrak{S}$ eine Komponente X mit $X \cap P \neq 0$ und $X \cap (E-P) \neq 0$, d.h. $\sup_X(f^+) = 1$ und $\mu(X) = +\infty$ enthält. $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}$ erfüllen die Bedingung II', denn jede Menge K aus $\mathfrak{S} - \mathfrak{N}$ hat mit $E - P$ mindestens einen Punkt z gemeinsam, und das Maß $\lambda(M) = 0$, wenn $z \notin M$, und $\lambda(M) = 1$, wenn $z \in M$, ist endlich und verschwindet in $\mathfrak{N}$, aber nicht auf der Menge K.

Dennoch gibt es unter den in $\mathfrak{S}$ totaladditiven und die Ungleichung (1.2) erfüllenden Funktionen φ eine größte, nämlich $\varphi_0(M) = 0$, falls $q \notin M$, und $\varphi_0(M) = -\infty$, falls $q \in M$. Zum Beweis nehmen wir an, es existiere eine weitere derartige Funktion φ und eine Menge L aus $\mathfrak{S}$ mit

$$\varphi_0(L) < \varphi(L). \tag{3.1}$$

Aus (1.2) würde dann folgen

$$\varphi(\{q\}) = -\infty, \tag{3.2}$$

so daß L wegen (3.1) das Element q nicht enthalten könnte. Hieraus ergäbe sich $\varphi_0(L) = 0$, d.h. nach (3.1):

$$0 < \varphi(L). \tag{3.3}$$

Daher wäre die obere Variation $\varkappa = \overline{\varphi}$ in $\mathfrak{S}$ ein nicht identisch verschwindendes und wegen (3.2) auch endliches Maß. Aus (1.2) und der Definition von μ und f resultierte überdies $\varphi(M) \leqq 0$ und damit $\varkappa(M) = 0$ für jede einelementige Menge M. Ein solches Maß $\varkappa$ kann aber, wie oben gezeigt, nicht existieren.

In unserem *zweiten Beispiel* sei E eine Menge der Mächtigkeit $\aleph_1$, $\mathfrak{S}$ das System aller Teilmengen von E und $\mu(X)$ die Mächtigkeit von X, wenn X endlich ist, andernfalls $\mu(X) = +\infty$. $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N} = \{0\}$ erfüllen die Bedingung II nicht, denn jedes in $\mathfrak{S}$ erklärte endliche Maß, das im Borelschen Ideal aller höchstens abzählbaren Teilmengen von E verschwindet, ist überall gleich Null (vgl. Ulam [3]). Wir werden nun zeigen, daß es dennoch keine größte totaladditive und (1.2) befriedigende Funktion φ gibt, wenn die in E erklärte reelle Funktion f nicht integrierbar ist.

Wir bemerken zunächst, daß in diesem Fall wegen der Meßbarkeit von f gilt

$$\int_E f^+\,d\mu = \int_E f^-\,d\mu = +\infty. \tag{3.4}$$

Sodann bestimmen wir eine höchstens abzählbare Teilmenge $R = \{p_1, p_2, \ldots\}$ von E mit $0 < f(p_i)$ und $\sum_i f(p_i) = +\infty$. Gäbe es nämlich eine solche Menge nicht, so wäre jede der Mengen $\left\{x : f(x) > \frac{1}{n}\right\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ endlich, d.h. $P = \{x : f(x) > 0\}$ wäre höchstens abzählbar, also auch $\sum_{x \in P} f(x) < +\infty$ im Widerspruch zu (3.4) und zu $\sum_{x \in P} f(x) = \int_E f^+\,d\mu$.

Bedeutet jetzt φ irgendeine totaladditive und der Ungleichung (1.2) genügende Funktion, so folgt aus (1.2) und (3.4), daß $\varphi(E) = -\infty$ und damit φ nach oben durch eine endliche Zahl γ beschränkt ist. Es gibt dann eine endliche oder abzählbare Folge (α_i) reeller Zahlen mit

$$0 < \alpha_i < f(p_i), \qquad \gamma < \sum_i \alpha_i < +\infty. \tag{3.5}$$

Die Funktion $\varrho(M) = \sum_{P_i \in M} \alpha_i$ ist in $\mathfrak{S}$ totaladditiv und endlich und läßt sich wegen (3.5) durch $\varrho(M) \leq \mu(M \cap R) \sup_{M \cap R} f \leq \mu(M \cap R) \sup_{M} f$ abschätzen. Für jedes M aus $\mathfrak{S}$ gilt außerdem $-\int_{M-R} f^- \, d\mu \leq \mu(M-R) \sup_{M-R} f \leq \mu(M-R) \sup_{M} f$, so daß $\psi(M) = -\int_{M-R} f^- \, d\mu + \varrho(M)$ ebenfalls totaladditiv ist mit $\psi(M) \leq \mu(M) \sup_M f$. Zugleich folgt aus (3.5) und der Definition von γ die Ungleichung $\psi(R) = \varrho(R) > \gamma \geq \varphi(R)$.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß μ ein RADONsches Maß in dem vermöge der diskreten Topologie lokal-kompakten Raum E ist.

Zur Bildung des *dritten Beispiels* verwenden wir eine überabzählbare Menge E, definieren $\mathfrak{S}$ als System aller Teilmengen von E, die entweder höchstens abzählbar sind oder in E eine höchstens abzählbare Komplementärmenge haben, und setzen $\mathfrak{N} = \{O\}$. Es gibt offenbar in $\mathfrak{S}$ kein endliches und infolgedessen auch kein schwach endliches Maß μ mit $\mathfrak{N}_\mu = \mathfrak{N}$, weil zu einem solchen Maß nur endlich oder abzählbar viele Elemente x mit $\mu(\{x\}) > 0$ existieren könnten. $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}$ erfüllen aber die Bedingung II. Bedeutet nämlich $\mathfrak{J}$ ein BORELsches Ideal in $\mathfrak{S}$ und K eine nicht zu $\mathfrak{J}$ gehörige Menge aus $\mathfrak{S}$, so lassen sich die beiden folgenden Fälle unterscheiden:

1. Es gibt ein Element p aus K, so daß $\{p\} \in \mathfrak{S} - \mathfrak{J}$.

2. $\mathfrak{J}$ enthält jede einelementige, also auch jede höchstens abzählbare Teilmenge von K.

Im ersten Fall setzen wir, falls $M \in \mathfrak{S}$ ist, $\lambda(M) = 0$, wenn $p \notin M$, und $\lambda(M) = 1$, wenn $p \in M$. Im zweiten Fall enthält $\mathfrak{J}$ nur höchstens abzählbare Mengen, denn gäbe es eine überabzählbare Menge J aus $\mathfrak{J}$, so wäre $E - J$ nach Definition von $\mathfrak{S}$ höchstens abzählbar, also erst recht $K \cap (E - J)$. Nach Voraussetzung gehörte dann $K \cap (E - J)$ zu $\mathfrak{J}$, ebenso natürlich $K \cap J$ als Teilmenge von J, also auch K im Widerspruch zur Annahme $K \in \mathfrak{S} - \mathfrak{J}$. Ferner muß K überabzählbar sein. Setzen wir nun $\lambda(M) = 0$, wenn M höchstens abzählbar ist, und $\lambda(M) = 1$, wenn $E - M$ höchstens abzählbar ist, so haben wir wiederum ein endliches in $\mathfrak{J}$ verschwindendes Maß λ mit $\lambda(K) > 0$.

Wir wollen schließlich, um das Operieren mit der Bedingung II zu erleichtern, zwei naheliegende Fälle angeben, in denen sich diese Bedingung über $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}$ aus der gleichen auf gewisse andere Mengensysteme zutreffenden Bedingung ableiten läßt.

Bedeutet μ ein Maß mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{S}$, ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_\mu$ und μ' die Einschränkung von μ auf einen in $\mathfrak{S}$ enthaltenen BORELschen Ring $\mathfrak{T}$, so gilt $\mathfrak{N}_{\mu'} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{T}$. Dies motiviert die Formulierung des folgenden Satzes.

Satz 3.1. *$\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ seien* Borelsche *Ringe mit $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{S}$, ferner $\mathfrak{N}$ ein* Borelsches *Ideal in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{T}$. Erfüllen nun $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}$ die Bedingung II, so auch $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{M}$.*

Beweis. $\mathfrak{J}$ sei ein Borelsches Ideal in $\mathfrak{T}$, das $\mathfrak{M}$ enthält, und K eine Menge aus $\mathfrak{T} - \mathfrak{J}$. Das System $\mathfrak{J}$ aller zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Teilmengen aller Mengen, die sich in der Gestalt $N \cup J$ mit $N \in \mathfrak{N}$ und $J \in \mathfrak{J}$ darstellen lassen, bildet offenbar ein Borelsches Ideal in $\mathfrak{S}$, das $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{J}$ enthält. Wäre nun $K \in \mathfrak{J}$, so gäbe es also eine Menge N aus $\mathfrak{N}$ und eine Menge J aus $\mathfrak{J}$ mit $K \subseteq N \cup J$, d.h. $K = (K \cap (N - J)) \cup (K \cap J)$. Wegen $K \in \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{T}$ wäre $K \cap J \in \mathfrak{T}$, d.h. auch $K \cap (N - J) \in \mathfrak{T}$. Da andererseits $K \cap (N - J)$ eine in $\mathfrak{S}$ liegende Teilmenge von N wäre und damit zu $\mathfrak{N}$ gehörte, gälte sogar $K \cap (N - J) \in \mathfrak{M}$, folglich erst recht $K \cap (N - J) \in \mathfrak{J}$. Aus $K \cap J \in \mathfrak{T}$, $K \cap J \subseteq J$ und $J \in \mathfrak{J}$ ergäbe sich, da $\mathfrak{J}$ ein Borelsches Ideal in $\mathfrak{T}$ bildet, $K \cap J \in \mathfrak{J}$ und damit $K \in \mathfrak{J}$ im Widerspruch zu $K \in \mathfrak{T} - \mathfrak{J}$. Somit ist $K \in \mathfrak{S} - \mathfrak{J}$, so daß ein in $\mathfrak{S}$ definiertes endliches Maß λ mit $\lambda(K) > 0$ existiert, das in $\mathfrak{J}$ verschwindet. Die Einschränkung von λ auf $\mathfrak{T}$ ist nun in $\mathfrak{T}$ erklärt, endlich, verschwindet in $\mathfrak{J}$ und erfüllt die Bedingung $\lambda(K) > 0$.

Dem folgenden Satz sei die Bemerkung vorausgeschickt, daß $D \cap \mathfrak{J}$ ein Borelsches Ideal in $D \cap \mathfrak{S}$ darstellt, wenn $\mathfrak{J}$ ein Borelsches Ideal in $\mathfrak{S}$ und $D \in \mathfrak{S}$ ist.

Satz 3.2. *Die größte Menge E eines* Borelschen *Ringes $\mathfrak{S}$ sei die Vereinigung von abzählbar vielen Mengen E_i aus $\mathfrak{S}$, und $\mathfrak{N}$ bedeute ein* Borelsches *Ideal in $\mathfrak{S}$. Erfüllen dann $E_i \cap \mathfrak{S}$ und $E_i \cap \mathfrak{N}$ für jedes i die Bedingung II, so auch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{N}$.*

Beweis. Ist $\mathfrak{J}$ ein Borelsches Ideal in $\mathfrak{S}$, das $\mathfrak{N}$ enthält, und $K \in \mathfrak{S} - \mathfrak{J}$, so gibt es i mit $E_i \cap K \in (E_i \cap \mathfrak{S}) - (E_i \cap \mathfrak{J})$, d.h. ein in $E_i \cap \mathfrak{S}$ erklärtes endliches Maß λ' mit $\lambda'(E_i \cap K) > 0$, aber $\lambda'(E_i \cap J) = 0$, falls $J \in \mathfrak{J}$. Das in $\mathfrak{S}$ durch $\lambda(M) = \lambda'(E_i \cap M)$ definierte Maß λ hat nun die verlangten Eigenschaften.

Übrigens ist die Umkehrung des eben bewiesenen Satzes ein Spezialfall des Satzes 3.1.

Literatur.

[1] Krickeberg, K.: Zur Theorie des oberen und unteren Integrals. Math. Nachr. **9**, 86—128 (1953). — [2] Hahn-Rosenthal: Set functions. Albuquerque 1948. — [3] Ulam, S.: Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre. Fundamenta Math. **16**, 140—150 (1930). [4] Cotlar, M.-Y. Frenkel: Sobre las funciones no-additivas de conjunto y generalización de la descomposición de la Vallée Poussin. Univ. Nac. Tucumán, Revista A. **5**, 227—253 (1946).

Würzburg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 1. August 1954.)

RAGAB, F. M.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 386—390 (1955)

New integrals involving Bessel-functions.

By

F. M. RAGAB.

§ 1. Introduction.

In § 3 of this paper, new integrals involving the product of two Bessel-functions as well as the product of three Bessel-functions will be evaluated. The integrals are

$$\int_0^\infty \lambda^{k-1} K_n(x\lambda^\varepsilon)\, K_m(e^{i\pi} x\lambda^\varepsilon)\, f(\lambda)\, d\lambda$$

where $\varepsilon = \pm 1$ and where $f(\lambda)$ is one of the functions

$$e^{-\lambda}, \quad J_l(2\lambda), \quad K_l(2\lambda), \quad e^{-\lambda} I_l(\lambda)$$

subject to the conditions for convergence. Some of these integrals will be evaluated in terms of MACROBERT's E-functions and the rest in terms of ordinary generalized hypergeometric functions. It may be noted that the formulae, expressing the values of the integrals, may serve as a basis for discussion of the asymptotic behavior of the integrals for large values of $|x|$, since the asymptotic expansion of the E-function was given by MACROBERT [1], p. 358 and that of the generalized hypergeometric function has been investigated by several writers (BARNES [2], 68, 83, 115, and MEIJER [3], 1173). The integrals will be evaluated by means of the formula

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} K_n(x)\, K_m(e^{i\pi} x) = {} & \frac{\cos\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{m-n}{2}\right)}{2ix\sqrt{\pi}} \times \\ & \times E\left(\frac{1+n+m}{2}, \frac{1+n-m}{2}, \frac{1+m-n}{2}, \frac{1-n-m}{2} : \frac{1}{2} : e^{i\pi} x^2\right) + \\ & + i\,\frac{\cos\pi\left(\frac{1+n+m}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}{2x^2\sqrt{\pi}} \times \\ & \times E\left(\frac{2+m+n}{2}, \frac{2+m-n}{2}, \frac{2+n-m}{2}, \frac{2-n-m}{2} : \frac{3}{2} : e^{i\pi} x^2\right). \end{aligned}\right.$$

Formula (1) will be deduced from (2) below.

§ 2. A product of two E-functions expressed as the sum of two E-functions.

The formula to be proved is

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} E(\alpha, 1-\alpha :: i\,x)\,E(\beta, 1-\beta :: -i\,x) &= \frac{\sqrt{\pi}\sin\pi\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin(\pi\alpha)\sin(\pi\beta)}\times \\ &\times E\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\alpha}{2}-\tfrac{\beta}{2}, \tfrac{1}{2}-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{\beta}{2}, \tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{\beta}{2}, 1-\tfrac{\alpha}{2}-\tfrac{\beta}{2} : \tfrac{1}{2} : \tfrac{x^2}{4}\right)+ \\ &+ \frac{2i\sqrt{\pi}}{x}\,\frac{\cos\pi\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin(\pi\alpha)\sin(\pi\beta)}\times \\ &\times E\left(1+\tfrac{\alpha}{2}-\tfrac{\beta}{2}, 1-\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{\beta}{2}, \tfrac{1}{2}+\tfrac{\alpha}{2}+\tfrac{\beta}{2}, \tfrac{3}{2}-\tfrac{\alpha}{2}-\tfrac{\beta}{2} : \tfrac{3}{2} : \tfrac{x^2}{4}\right). \end{aligned}\right.$$

The following formulae ([1], p. 353 and [4]) will be required in the proof:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &E(p;\alpha_r : q;\varphi_s : x) = \sum_{r=1}^{p}\,{\prod_{s=1}^{p}}'\,\Gamma(\alpha_s-\alpha_r)\left\{\prod_{t=1}^{q}\Gamma(\varphi_t-\alpha_r)\right\}^{-1} x^{\alpha_r}\,\Gamma(\alpha_r)\times \\ &\times F\left(\alpha_r, \alpha_r-\varphi, +1, \ldots, \alpha_r-\varphi_q+1; \alpha_r-\alpha_1+1, \ldots *\ldots, \alpha_r-\alpha_p+1; (-1)^{p-q}x\right), \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &{}_1F_1(\alpha; 2\alpha; x)\times {}_1F_1(\beta; 2\beta; -x) \\ &= {}_2F_3\left[\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta), \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+1); \alpha+\tfrac{1}{2}, \beta+\tfrac{1}{2}, \alpha+\beta; \frac{x^2}{4}\right]. \end{aligned}\right.$$

To prove (2), expand each of the two E-functions on the right hand side R by means of (3), sum any two similar terms, and get

$$\begin{aligned} R = {}&\Gamma(1-2\alpha)\,\Gamma(1-2\beta)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,e^{\frac{i\pi}{2}(\alpha-\beta)}\times \\ &\times x^{\alpha+\beta}\,{}_2F_3\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta+1}{2}; \alpha+\tfrac{1}{2}, \beta+\tfrac{1}{2}, \alpha+\beta; -\frac{x^2}{4}\right)+ \\ &+\Gamma(1-2\alpha)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(2\beta-1)\,\Gamma(1-\beta)\,e^{\frac{i\pi}{2}(\alpha+\beta-1)}\times \\ &\times x^{1+\alpha-\beta}\,{}_2F_3\left(\frac{1+\alpha-\beta}{2}, \frac{2+\alpha-\beta}{2}; 1+\alpha-\beta, \tfrac{3}{2}-\beta, \tfrac{1}{2}+\alpha; -\frac{x^2}{4}\right)+ \\ &+\Gamma(2\alpha-1)\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-2\beta)\,\Gamma(\beta)\,e^{\frac{i\pi}{2}(1-\alpha-\beta)}\times \\ &\times x^{1+\beta-\alpha}\,{}_2F_3\left(\frac{1-\alpha+\beta}{2}, \frac{2-\alpha+\beta}{2}; 1+\beta-\alpha, \tfrac{3}{2}-\alpha, \tfrac{1}{2}+\beta; -\frac{x^2}{4}\right)+ \\ &+\Gamma(2\alpha-1)\,\Gamma(2\beta-1)\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,e^{\frac{i\pi}{2}(\beta-\alpha)}\times \\ &\times x^{2-\alpha-\beta}\,{}_2F_3\left(\frac{2-\alpha-\beta}{2}, \frac{3-\alpha-\beta}{2}; \tfrac{3}{2}-\alpha, \tfrac{3}{2}-\beta, 2-\alpha-\beta; -\frac{x^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Now substitute for each ${}_2F_3$ in the last expression from (4); then (2) is obtained by another application of (3).

To obtain (1), write $(2x)$ for (xi) in (2) and apply the formula [1], p. 351

$$\cos n\pi\, E\left(\tfrac{1}{2}+n, \tfrac{1}{2}-n :: 2x\right) = \sqrt{2\pi x}\, e^{x} K_n(x). \tag{5}$$

§ 3. Integrals involving Bessel-functions.

Formula (1) in combination with the formula

$$\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{k-1} E\left(p;\alpha_r : q;\varphi_s : \frac{x}{\lambda^n}\right) d\lambda = \frac{n^{k-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}} E\left(p+n;\alpha_r : q;\varphi_s : \frac{x}{n^n}\right), \tag{6}$$

([5], p. 131) where $\alpha_{r+\nu+1} = \frac{k+\nu}{n}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ ($n=2$ in this case) gives if $R(k) > -1$ and $R(x) > 0$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{k-1} K_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) K_m\left(e^{i\pi}\frac{x}{\lambda}\right) d\lambda = \frac{2^{k-1}}{\pi(xi)}\cos\pi\left(\frac{m+n}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)\times \\ \quad \times E\left(\frac{1+n-m}{2}, \frac{1+m-n}{2}, \frac{1+n+m}{2}, \frac{1-n-m}{2}, \right. \\ \qquad \left. \frac{k+1}{2}, \frac{k+2}{2} : \frac{1}{2} : e^{i\pi}\frac{x^2}{4}\right) + \\ \quad + \frac{e^{\frac{i\pi}{2}} 2^k}{\pi x^2}\cos\pi\left(\frac{1+n+m}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)\times \\ \quad \times E\left(\frac{2+n-m}{2}, \frac{2+m-n}{2}, \frac{2+n+m}{2}, \frac{2-n-m}{2}, \right. \\ \qquad \left. \frac{k+2}{2}, \frac{k+3}{2} : \frac{3}{2} : e^{i\pi}\frac{x^2}{4}\right). \end{cases} \tag{7}$$

Also (1) in combination with the formula [6] giving the value of the integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{k-1} E(p;\alpha_r : q;\varphi_s : \lambda^2 z)\, d\lambda$$

gives an expression for

$$\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{k-1} K_m(e^{i\pi} x\lambda)\, K_n(x\lambda)\, d\lambda,$$

where $R(k \pm m \pm n) > 0$, $R(x) > 0$, in terms of six generalized hypergeometric functions. Again from (1) and the formula

$$4\int_0^\infty \lambda^{m-1} K_n(2\lambda)\, E\left(p;\alpha_r : q;\varphi_s : \frac{x}{\lambda^2}\right) d\lambda = E(p+2;\alpha_r : q;\varphi_s : x), \tag{8}$$

where

$$R(m \pm n) > 0,\ \alpha_{p+1} = \tfrac{1}{2}(m+n),\ \alpha_{p+2} = \tfrac{1}{2}(m-n),$$

([7], p. 258) one gets if $R(x)>0$, $R(k\pm l+1)>0$

$$
(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_0^\infty \lambda^{k-1} K_l(2\lambda)\, K_m\left(e^{i\pi}\frac{x}{\lambda}\right) K_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) d\lambda = \frac{\cos\pi\left(\frac{n+m}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}{8\sqrt{\pi}\cdot x} \times \\
&\quad \times E\left(\frac{1+m+n}{2}, \frac{1+m-n}{2}, \frac{1+n-m}{2}, \frac{1-n-m}{2}, \right. \\
&\qquad \left. \frac{1+k+l}{2}, \frac{1+k-l}{2} : \frac{1}{2} : e^{i\pi} x^2\right) + \\
&+ \frac{e^{\frac{i\pi}{2}} \cos\pi\left(\frac{1+n+m}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{n-m}{2}\right)}{8\sqrt{\pi}\cdot x^2} \times \\
&\quad \times E\left(\frac{2+m+n}{2}, \frac{2+m-n}{2}, \frac{2+n-m}{2}, \frac{2-n-m}{2}, \right. \\
&\qquad \left. \frac{2+k+l}{2}, \frac{2+k-l}{2} : \frac{3}{2} : e^{i\pi} x^2\right).
\end{aligned}\right.
$$

From (1) and the formula

$$
(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&4i\pi \int_0^\infty \lambda^{m-1} J_n(2\lambda)\, E\left(p;\alpha_r : q;\varphi_s : \frac{x}{\lambda^2}\right) d\lambda \\
&\quad = i^{m-n} E(p+2;\alpha_r : q;\varphi_s : x e^{-i\pi}) - i^{n-m} E(p+2;\alpha_r : q;\varphi_s : x e^{i\pi}),
\end{aligned}\right.
$$

([5], p. 8) where

$$
R(m+n)>0, \quad R\left(\tfrac{3}{2} - m + 2\alpha_r\right) > 0, \quad r = 1, 2, 3, \ldots, p,
$$

$$
\alpha_{p+1} = \tfrac{1}{2}(m+n), \quad \alpha_{p+2} = \tfrac{1}{2}(m-n),
$$

one gets an expression for

$$
\int_0^\infty \lambda^{k-1} J_l(2\lambda)\, K_m\left(\frac{x}{\lambda} e^{i\pi}\right) K_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) d\lambda,
$$

where

$$
R(x)>0, \quad R\left(\tfrac{3}{2} - k \pm m \pm n\right) > 0, \quad R(k \pm l + 1) > 0,
$$

in terms of E-functions.

Again from (1) and the formula

$$
(11)\qquad \int_0^\infty \lambda^{k-1} K_n(\lambda)\, E(p;\alpha_r : q;\varphi_s : \lambda^2 z)\, d\lambda
$$

$$
2^{k-2} \frac{\pi^2}{\sin\pi\left(\frac{k+n}{2}\right)\sin\pi\left(\frac{k-n}{2}\right)} E\left(p;\alpha_r : 1 - \frac{k+n}{2}, 1 - \frac{k-n}{2}, \varphi_1, \ldots, \varphi_q : 4z\right) +
$$

$$
+ \sum_{n,-n} \frac{\pi^2 2^{-n-2} z^{\frac{k+n}{2}}}{\sin\pi\left(\frac{k+n}{2}\right)\sin(n\pi)} E\left(\begin{matrix} \alpha_1 + \frac{k+n}{2}, \ldots, \alpha_p + \frac{k+n}{2} : 4z \\ 1 + \frac{k+n}{2}, 1+n, \varphi_1 + \frac{k+n}{2}, \ldots, \varphi_q + \frac{k+n}{2} \end{matrix}\right),
$$

([6], p. 52) where

$$R(k \pm n + 2\alpha_r) > 0, \quad r = 1, 2, 3, \ldots, p, \quad |\arg z| < \pi,$$

one gets an expression for

$$\int_0^\infty \lambda^{k-1} K_l(\lambda)\, K_m(e^{i\pi} x\lambda)\, K_n(x\lambda)\, d\lambda,$$

where

$$R(x) > 0, \quad R(k \pm l \pm m \pm n) > 0$$

in terms of six generalized hypergeometric functions.

Finally from (1) and the two formulae [6] which give an expression for the two integrals

$$\int_0^\infty e^{-\mu} I_n(\mu)\, \mu^{m-1} E(p; \alpha_r : q; \varphi_s : \mu^{\pm 2} z)\, d\mu;$$

one gets an expression for

$$\int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{k-1} I_l(\lambda)\, K_m(x\lambda e^{i\pi})\, K_n(x\lambda)\, d\lambda,$$

where

$$R(x) > 0, \quad R(k + l \pm m \pm n) > 0, \quad R(\tfrac{3}{2} - k) > 0$$

in terms of six ${}_6F_5\left(\ldots; \ldots; \frac{1}{x^2}\right)$, and an expression for

$$\int_0^\infty e^{-\lambda} \lambda^{k-1} I_l(\lambda)\, K_m\left(\frac{x}{\lambda} e^{i\pi}\right) K_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) d\lambda,$$

where

$$R(k + l) > -1, \quad R(\tfrac{1}{2} - k \pm m \pm n) > 0, \quad R(x) > 0$$

in terms of six $E(p; \alpha_r : q; \varphi_s : e^{i\pi} x^2)$ with $p = 8$ and $q = 3$.

References.

[1] MacRobert, T. M.: Functions of a complex variable, 3rd ed. London 1946. — [2] Barnes, E. W.: Proc. London math. Soc. (2) **5**, 59—116 (1907). — [3] Meijer, C. S.: Proc. Kon. Akad. Wet., Amsterdam **49**, 1165—1175 (1946). — [4] Bailey, W. N.: Proc. London math. Soc. (2) **28**, 242—254 (1928). — [5] Ragab, F. M.: Proc. Glasgow math. Assoc. **1**, 8—9, 129—136 (1953). — [6] Ragab, F. M.: Proc. Glasgow math. Assoc. **2** (in press). — [7] MacRobert, T. M.: Philos. Magazine (7) **31**, 254—260 (1941).

Fac. of Science, Ein Shams University, Abbassia, Cairo (Egypt).

(Eingegangen am 3. August 1954.)

Lorch, E. R.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 391—407 (1955)

On the Volume of Smooth Convex Bodies in Hilbert Space.

By
E. R. Lorch[1]).

Introduction.

The problem of introducing the notion of volume into Hilbert space $\boldsymbol{H}$ has received attention before. The commonly accepted formulation of this problem is to take the classic theory of Lebesgue measure and attempt to extend it to $\boldsymbol{H}$. Here the result is quickly obtained that no direct extension is possible. A possible procedure at this juncture is to consider making alterations in the axioms for an abstract measure theory in such a way that the altered axioms allow of a development in $\boldsymbol{H}$. At least one such program has been carried out[2]). There seems to be no resemblance between this earlier work and what is proposed below.

The present paper is a continuation of certain previous endeavors of the author which were devoted to the theory of convex bodies and, in particular, to smooth bodies. In an earlier paper[3]) the author developed a theory of volumes and mixed-volumes for smooth bodies in n-space based on the concepts of positive definite quadratic forms and homeomorphisms. Subsequently[4]), the notion of volume of order r, $1 \leqq r \leqq \infty$, was introduced. In this context, the classical volume, considered by all authors since the time of Archimedes, corresponds to the value of the parameter: $r = 1$. It was seen in the same note that the case $r = 2$ presents particularly interesting possiblities since in a certain sense it is the self-adjoint case.

In the present work, we extend our previous results to Hilbert space. We define a smooth convex body $\mathfrak{K}$ in $\boldsymbol{H}$ and obtain for such a body a class of positive definite self-adjoint transformations. With these transformations one may define a fundamental homeomorphism in $\boldsymbol{H}$. This leads to the notion of the adjoint body, $\mathfrak{K}^*$. The volume of $\mathfrak{K}^*$ is then expressed by means of an integral of a function $D(x)$ which is the infinite product of the characteristic values of the above self-adjoint transformations. The volume of $\mathfrak{K}^*$ which is calculated is that of order $r = 2$. It is possible to develop a theory of volume

[1]) This paper was written while the author was employed on Contract AF — 18 (600) — 562.

[2]) Löwner, Karl: Grundzüge einer Inhaltslehre im Hilbertschen Raume. Ann. of Math. **40**, 816—833 (1939).

[3]) Lorch, E. R.: Differentiable inequalities and the theory of convex bodies. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 243—266 (1951).

[4]) Lorch, E. R.: Su certe estensioni del concetto di volume. Rend. Acc. Naz. Lincei, ser. VIII **16**, 25—29 (1954).

for other of r, but this theory suffers from the defect that the only body for which the volume seems to be defined is the unit sphere. For $r=2$, the possibilities are much more varied.

In the finite dimensional case, the integration is carried out over the surface of the unit sphere. There is no ambiguity here since there is precisely one measure of this sphere which is invariant under rotations. In the case of Hilbert space, the integration is once more carried out over the surface of the unit sphere. For a fairly complete discussion of the nature of this problem we refer the reader to the body of the paper. However, a few words may be said here. The problem of determining a volume applies not to a single body but to a class of bodies. Each body of this class gives rise to an integrand which is a continuous bounded function defined over the unit sphere. This class of functions generates a Banach lattice $\boldsymbol{B}$ and finally an integral of a function in $\boldsymbol{B}$ is defined by means of a bounded linear functional over $\boldsymbol{B}$ which has certain properties—for example, the so-called Daniell property which assures complete additivity of the corresponding measure, and also the property of being invariant under a suitably chosen group of transformations, say, the complete group of rotations. Now, in general, nothing of consequence to our present researches is known concerning either the existence or the uniqueness of such linear functionals. It is known that for certain specific Banach lattices, the desired functional exists and is unique. Thus the problem of finding the volume of ellipsoids in Hilbert space is solved in the present paper. On the other hand, it is known that for the lattice of all continuous functions, the integral does not exist. We have not in the present communication studied the various Banach lattices which could arise and therefore have not attacked the problem of the existence and uniqueness of an integral. We hope to return to this critical question.

The present paper is self-contained; knowledge of the contents of the papers cited in [3]) and [4]) will be found useful to the understanding of this work but is not required to follow its logical structure.

I. The Body.

We consider a real Hilbert space $\boldsymbol{H}$ of vectors $x, y, z, \ldots$. In this space, let $\varphi(x)$ be a real function, $\varphi(x) \geqq 0$, positively homogeneous of degree 1, that is, $\varphi(tx) = t\varphi(x)$ for $t \geqq 0$. The precise statement of the conditions of continuity and differentiability which are placed on $\varphi(x)$ will follow. The equation $\varphi(x) = 1$ defines a surface. It is the volume bounded by this surface which interests us.

Let r be a real constant, $r > 1$. Instead of dealing with the function $\varphi(x)$, consider the function $G(x)$ defined by $rG(x) = [\varphi(x)]^r$. We shall suppose that $G(x)$ is continuous and possesses continuous derivatives of order 2 defined in the following manner. Let $\psi(\alpha, \beta) = G(x + \alpha y + \beta z)$. Then we require that ψ have continuous derivatives of order 2. The derivative of ψ with respect to α at $\alpha = \beta = 0$ is denoted by $G_y(x)$. Similarly, the second derivative is denoted by $G_{yz}(x)$. More generally, we shall require that the function

$\psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = G(x + \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n)$ have continuous second derivatives. It is clear that $G_{yz}(x) = G_{zy}(x)$, that $G_y(x)$ is positively homogeneous in x of order $r-1$ and that $G_x(x) = rG(x)$. It may also be seen that $G_{yz}(x)$ is bilinear in y and z.

We shall suppose that for $x \neq 0$, $y \neq 0$, $G_{yy}(x) > 0$. As indicated in reference [3], $G_{yy}(x)$ yields a measure of the curvature of the surface $\varphi(x) = 1$. We shall suppose that this curvature is uniformly bounded. That is, there exists a constant M such that for all x and y

$$G_{yy}(x) \leq M \|x\|^{r-2} \|y\|^2. \tag{1}$$

It may now be deduced readily that $|G_{yz}(x)| \leq M \|x\|^{r-2} \|y\| \|z\|$. From this it follows that $G_{yz}(x)$ is a bounded bilinear functional and since $G_{yx}(x) = (r-1) G_y(x)$, we see that $G_y(x)$ is also a bounded linear functional in y. The fact that $G_y(x)$ and $G_{yz}(x)$ are bounded may be deduced without hypothesis (1) as has been shown [5].

Since $G_{yz}(x)$ is bilinear symmetric and bounded in y and z, it is well known that there is a self-adjoint transformation $\mathcal{G}(x)$ such that $G_{yz}(x) = (\mathcal{G}(x) y, z)$, where the parenthesis denotes the inner product in the space $\boldsymbol{H}$. Thus the function $G(x)$ gives rise to a self-adjoint transformation $\mathcal{G}(x)$ defined for each x such that $(\mathcal{G}(x) x, x) = r(r-1) G(x)$. The conditions of differentiability on $G(x)$ lead to the following property for $\mathcal{G}(x)$:

$$\lim_{t \to 0} (t^{-1} [\mathcal{G}(x + tz) - \mathcal{G}(x)] y, x) = (r-2) (\mathcal{G}(x) y, z). \tag{2}$$

Proof. Since $G(x)$ is twice differentiable, we have

$$\begin{aligned} t^{-1} (G_{yx}(x + tz) - G_{yx}(x)) &= t^{-1} (G_{yx+tz}(x + tz) - G_{yx}(x)) - t^{-1} G_{ytz}(x + tz) \\ &= t^{-1}(r-1) (G_y(x + tz) - G_y(x)) - G_{yz}(x + tz) \to (r-1) G_{yz}(x) - G_{yz}(x) \\ &= (r-2) G_{yz}(x). \end{aligned}$$

We have used the continuity of the second derivative of $G(x)$ in deriving $\lim_{t \to 0} G_{yz}(x + tz) = G_{yz}(x)$.

We shall now establish a converse proposition:

Theorem 1. *Let $\mathcal{G}(x)$ be a bounded self-adjoint transformation defined for each $x \neq 0$ in Hilbert space $\boldsymbol{H}$ with the following properties:*

a) *$\mathcal{G}(x)$ is positively homogeneous of order $r-2$ where $r > 1$.*

b) *$\mathcal{G}(x)$ is continuous in the sense that the norm (or bound) $\|\mathcal{G}(x + y) - \mathcal{G}(x)\|$ is small when $\|y\|$ is small.*

c) *There is a constant K such that for all x*

$$\|\mathcal{G}(x)\| \leq K \|x\|^{r-2}.$$

d) *Equation (2) is satisfied.*

[5] Lorch, E. R.: A curvature study of convex bodies in Banach spaces. Annali di Mat. Pura ed Appl., ser. IV **34**, 105—112 (1953). See in particular pp. 108, 109.

Then the function $G(x)$ *defined by* $r(r-1)G(x) = (\mathcal{G}(x)x, x)$ *is twice continuously differentiable and for the second derivative one has* $G_{yz}(x) = (\mathcal{G}(x)y, z)$.

Proof. Consider the calculation of the first derivative. We have

$$(\mathcal{G}(x+ty)[x+ty], x+ty) - (\mathcal{G}(x)x, x) = ([\mathcal{G}(x+ty) - \mathcal{G}(x)]x, x) + \\ + 2t(\mathcal{G}(x+ty)x, y) + t^2(\mathcal{G}(x+ty)y, y).$$

Dividing by t and allowing t to approach zero, we see that: the first term on the right side approaches $(r-2)(\mathcal{G}(x)x, y)$ by virtue of condition d) of the theorem. The second term approaches $2(\mathcal{G}(x)x, y)$ by virtue of b). The third term approaches zero by virtue of c). Hence the first derivative of $G(x)$ exists and equals $(r-1)^{-1}(\mathcal{G}(x)x, y)$.

We turn to the second derivative. We have

$$(\mathcal{G}(x+tz)[x+tz], y) - (\mathcal{G}(x)x, y) = ([\mathcal{G}(x+tz) - \mathcal{G}(x)]x, y) + \\ + t(\mathcal{G}(x+tz)z, y).$$

Dividing by t and allowing t to approach zero, we see that: the first term on the right approaches $(r-2)(\mathcal{G}(x)y, z)$ by virtue of d) and also using the fact that $\mathcal{G}(x)$ is self-adjoint. The second term on the right approaches $(\mathcal{G}(x)z, y) = (\mathcal{G}(x)y, z)$ by b). Thus the second derivative of $G(x)$ exists and equals $(\mathcal{G}(x)y, z)$. It is clear that this function is continuous in x, y, and z. The theorem is proved.

This theorem and the discussion preceding it show that the notion of smooth surface and that of a family of self-adjoint transformations satisfying adequate conditions of differentiability and continuity, are equivalent. In our development, we may proceed from either point of view. Since the theory of self-adjoint transformations is highly developed, it is natural that one should prefer to phrase matters in terms of these transformations. It should be added that it is the above mentioned equivalence which makes the entire development of this theory possible.

II. Fundamental Hypotheses.

Consider a convex surface defined as above by means of the self-adjoint transformations $\mathcal{G}(x)$. In the work cited earlier [3]), we have shown that in the n-dimensional case, the volume contained by the surface is given by an integral over the unit sphere of the space, in which the integrand is a determinant whose value is precisely the product of the characteristic roots of $\mathcal{G}(x)$. In going over to the infinite dimensional situation, it seems reasonable to demand that $\mathcal{G}(x)$ have a pure point spectrum and that the product of the characteristic values of $\mathcal{G}(x)$ should be convergent. Thus most of these values should be close to 1. As is natural in situations concerning infinite products, the problems are transformed into ones involving infinite sums. Consider therefore the transformation $\mathcal{G}(x) - I$. Let its characteristic values

be $\alpha_x^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots$. We require that $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_x^{(i)}|$ be convergent. This insures the absolute convergence of the infinite product $\prod_{i=1}^{\infty} (1+\alpha_x^{(i)})$ where the numbers $1+\alpha_x^{(i)}$ represent the characteristic numbers of $G(x)$. These hypotheses imply also that $G(x)-I$ is completely continuous.

We shall desire that the integrand of the previous paragraph be bounded over the unit sphere. Thus $\prod_{i=1}^{\infty} (1+\alpha_x^{(i)})$ should be bounded for $||x||=1$. The formulation we choose for this is that $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_x^{(i)}|$ should be uniformly bounded in x. Since the norm of $G(x)$ equals the maximum of the numbers $|1+\alpha_x^{(i)}|$, this means that $||G(x)||$ is bounded over the unit sphere. Furthermore, in order to insure continuity at several points in the argument, we shall stipulate that $G(x)$ is continuous in the uniform topology.

Up to the present, we have made no assumption about the number r except that it be fixed and larger than 1. As mentioned in the introduction, the theory of volumes has substance only in the case $r=2$. From this point forward, we shall assume that $r=2$. This implies, for instance, that $G(x)$ is homogeneous of degree zero and that the right hand member of equation (2) is 0.

We are now ready to state the precise nature of our hypotheses.

We postulate the existence for each $x \neq 0$ in the real Hilbert space $\boldsymbol{H}$ *of a bounded self-adjoint transformation $G(x)$. This transformation is to have the following properties*:

(a) *$G(x)$ is positively homogeneous of degree zero: for $t>0$, $G(tx)=G(x)$.*

(b) *There exist constants $L>0$ and $M>0$ such that for all $x \neq 0$ and y*

$$L||y||^2 \leq (G(x)y, y) \leq M||y||^2. \tag{3}$$

(c) *$G(x)$ is continuous in the uniform topology; that is, $||y|| \to 0$ implies $||G(x+y)-G(x)|| \to 0$.*

(d) *The transformation $G(x)-I$ is completely continuous. Furthermore, the sum of the absolute values of the characteristic values of $G(x)-I$ is convergent. If we write $|||G(x)-I|||$ for this sum, there exists a constant K such that $|||G(x)-I||| \leq K$. The function of x, $|||G(x)-I|||$, is continuous.*

(e) *For each $x \neq 0$, y, and z in* $\boldsymbol{H}$, *we have*

$$\lim_{t \to 0} t^{-1} ([G(x+tz)-G(x)]y, x) = 0. \tag{4}$$

We consider in the sequel, sets of transformations $G(x)$, $\mathcal{H}(x)$, etc., each of which satisfy these conditions. It is understood that the constants L, M, and K depend on the given family and may be distinct for $G(x)$ and $\mathcal{H}(x)$. We shall show that the class of sets $G(x)$ which satisfy (a) to (e) is convex, that is, if $G(x)$ and $\mathcal{H}(x)$ satisfy (a) to (e), then so does $\lambda G(x)+(1-\lambda)\mathcal{H}(x)$ for $0 \leq \lambda \leq 1$. This fact is of importance if one wishes to consider the theory of mixed volumes.

Suppose then that $\mathcal{G}(x)$ and $\mathcal{H}(x)$ are two families of self-adjoint transformations which satisfy (a) to (e). If $0 \leqq \lambda \leqq 1$, it is easy to see that $\lambda \mathcal{G}(x) + (1-\lambda)\mathcal{H}(x)$ satisfies (a), (b), (c) and (e). Let us consider (d). It is obvious that $\lambda \mathcal{G}(x) + (1-\lambda)\mathcal{H}(x) - I$ is completely continuous.

We shall show that if A and B are transformations such that $|||A||| \leqq k$ and $|||B||| \leqq k$, then $|||A+B||| \leqq 6k$. To that effect write $C = A + B$. Let the positive characteristic numbers of A, B, C in order of decreasing magnitude (with repetitions for multiplicities) be represented by a_n^+, b_n^+, c_n^+, $n = 1, 2, \ldots$. Similarly, let a_n^-, b_n^-, c_n^- represent the negative characteristic values in order of increasing magnitude. Note that $|||A||| = \sum_n a_n^+ - \sum_n a_n^-$. Suppose that the number of positive and negative characteristic values of A and B is infinite. Then according to a theorem of H. WEYL and R. COURANT[6]), for any positive p and q, $c_{p+q-1}^+ \leqq a_p^+ + b_q^+$ and $c_{p+q-1}^- \geqq a_p^- + b_q^-$. Thus in particular we have $c_{2p-1}^+ \leqq a_p^+ + b_p^+$ and hence $\sum_p c_{2p-1}^+ \leqq \sum_p a_p^+ + \sum_p b_p^+$. In the same way we have $\sum_p c_{2p}^+ \leqq \sum_p a_p^+ + \sum_p b_{p+1}^+$. Hence $\sum_p c_p^+ \leqq 2\left(\sum_p a_p^+ + \sum_p b_p^+\right)$. We have also $\sum_p c_p^- \geqq 2\left(\sum_p a_p^- + \sum_p b_p^-\right)$. Combining these inequalities, we obtain finally $|||C||| \leqq 2|||A||| + 2|||B||| \leqq 4k$.

Suppose now that the number of positive characteristic numbers of B is finite, say, N. Then according to[6]) we have $c_{p+N}^+ \leqq a_p^+$. Since by what we have said previously, $c_1^+ + \cdots + c_N^+ \leqq 2\left(\sum_p a_p^+ + \sum_p b_p^+\right)$ we have $\sum_p c_p^+ \leqq 3\sum_p a_p^+ + 2\sum_p b_p^+$. A similar argument applies for the negative characteristic values. Hence in all cases we have $|||C||| \leqq 3|||A||| + 3|||B||| \leqq 6k$. This argument shows that $f(x) = |||\lambda \mathcal{G}(x) + (1-\lambda)\mathcal{H}(x) - I||| \leqq 6k$. To complete the proof of d) we must demonstrate the continuity of $f(x)$. We shall first prove a

Lemma. *Let $\mathcal{G}(x)$ satisfy the fundamental hypotheses and let $\alpha_x^{(i)}$ be the characteristic values of $\mathcal{G}(x) - I$. Then given any x and $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ and an integer n such that $\|y - x\| < \delta$ implies $\sum_{n+1}^{\infty} |\alpha_y^{(i)}| < \varepsilon$.*

Proof. If n is arbitrary, we have

$$\sum_{n+1}^{\infty} |\alpha_y^{(i)}| \leq \sum_1^{\infty} \left(|\alpha_y^{(i)}| - |\alpha_x^{(i)}|\right) + \sum_1^{n} \left(|\alpha_x^{(i)}| - |\alpha_y^{(i)}|\right) + \sum_{n+1}^{\infty} |\alpha_x^{(i)}|.$$

Let $\varepsilon > 0$ be fixed. The first term on the right of the inequality is precisely $\left(|||\mathcal{G}(y) - I||| - |||\mathcal{G}(x) - I|||\right)$. Since by d) $|||\mathcal{G}(x) - I|||$ is a continuous function of x, this term may be made smaller than $\varepsilon/3$ in a suitable neighborhood of x. Next, since $\sum_1^{\infty} |\alpha_x^{(i)}|$ is convergent, we may choose an n such that the last expression on the right is less than $\varepsilon/3$.

[6]) The proof of this theorem is given in the book by RIESZ and SZ. NAGY: Lecons d'analyse fonctionelle, sec. éd., p. 236. Budapest: Akadémiai Kiadó 1953.

With this value of n, it is now possible to make the middle term less than $\varepsilon/3$ by suitably restricting the neighborhood of x. This is done as follows: For a fixed i, $i=1, \ldots, n$, one may, according to a theorem of F. RELLICH[7]), choose a neighborhood of x in such a way that for all y in that neighborhood $|\alpha_y^{(i)} - \alpha_x^{(i)}| < \varepsilon/(3n)$. Thus in particular $(|\alpha_y^{(i)}| - |\alpha_x^{(i)}|) < \varepsilon/(3n)$. If we choose a single neighborhood of x of radius δ for which all our conditions are satisfied, we obtain the result of the lemma.

We return now to the proof of the continuity of the function $f(x)$ defined above our lemma. Let $A(x)$, $B(x)$, and $C(x) = A(x) + B(x)$ be three families of self-adjoint transformations of which $A(x)$ and $B(x)$ satisfy the fundamental hypotheses. Let $\alpha_x^{(i)}$, $\beta_x^{(i)}$ and $\gamma_x^{(i)}$ be the corresponding sets of characteristic numbers. Then for any n,

$$\begin{aligned}(|||C(x)||| - |||C(y)|||) &= \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_x^{(i)}| - \sum_{i=1}^{\infty} |\gamma_y^{(i)}| \\ &\leq \left| \sum_{1}^{2n} (|\gamma_x^{(i)}| - |\gamma_y^{(i)}|) \right| + \sum_{2n+1}^{\infty} |\gamma_x^{(i)}| + \sum_{2n+1}^{\infty} |\gamma_y^{(i)}|.\end{aligned}$$

Now, given an $\varepsilon > 0$, we may find a suitable neighborhood of x and an integer n such that in this neighborhood $\sum_{n+1}^{\infty} |\alpha_y^{(i)}| < \varepsilon$ and $\sum_{n+1}^{\infty} |\beta_y^{(i)}| < \varepsilon$. Hence $\sum_{2n+1}^{\infty} |\gamma_y^{(i)}|$ is small by the type of argument which precedes the lemma. With this fixed value of n, and restricting the neighborhood of x suitably, one has by virtue of RELLICH's theorem[7]) that $\left| \sum_{1}^{2n} (|\gamma_x^{(i)}| - |\gamma_y^{(i)}|) \right| < \varepsilon$. This argument proves the continuity of $|||C(x)|||$. We recapitulate these results in

Theorem 2. *The set of families of self-adjoint transformations which satisfy the fundamental hypotheses is convex. That is, if $G(x)$ and $H(x)$ are in the set, then so is $\lambda G(x) + (1-\lambda) H(x)$ for $0 \leq \lambda \leq 1$.*

III. The Continuity of the Characteristic Values.

Given a point x, consider the positive characteristic values of $G(x) - I$. Suppose that in decreasing order of magnitude and counting multiplicities (which are necessarily of finite order), they are $\alpha_x^{(1)}, \alpha_x^{(2)}, \ldots$. The number of these may be finite (including zero) or denumerably infinite. Let C_x denote the number of positive characteristic values of $G(x) - I$. Let C be the cardinal which is the least upper bound of all C_x. Then C is either an integer or equals Aleph null. We define C functions of x, which we shall denote with $\alpha_x^{(i)}$ as follows: If at x there are C positive characteristic values of $G(x) - I$, then $\alpha_x^{(i)}$ is the i^{th} such value. If at x there are fewer than C positive

[7]) Loc. cit. [6]), p. 369. A more detailed application of this theorem is given in the proof of theorem 3.

characteristic values, then the C functions at x are defined to be those values followed by a suitable number of zeros. In this way, $\alpha_x^{(i)}$ is well defined for each x and for each index i. We may proceed in a similar way with the negative characteristic values. We obtain in this way a denumerable number of functions of x which for convenience we denote by $\alpha_x^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots$. Any characteristic value of $G(x)-I$ not taken into account by this scheme must be zero.

This definition of the functions $\alpha_x^{(i)}$ may seem somewhat arbitrary. For example, if the $\alpha_x^{(i)}$ were locally analytic, our definition would give piece-wise analytic functions rather than analytic functions. For our purposes however, it is the sum $\sum |\alpha_x^{(i)}|$ and product $\prod (1+\alpha_x^{(i)})$ which is of importance and the possible strain caused by our definition disappears since the order of summation or multiplication is immaterial.

We shall show that the functions $\alpha_x^{(i)}$ are continuous. Let x be fixed and let $\{x_n\}$ be a sequence such that $x_n \to x$. Let $E(\lambda)$ and $E_n(\lambda)$ be the resolutions of the identity of $G(x)-I$ and $G(x_n)-I$ respectively. Then since $\|G(x_n)-G(x)\| \to 0$, $E_n(\lambda)$ tends to $E(\lambda)$ in a certain way which will be described [theorem of F. RELLICH[7]]. Let ε be a positive number not in the spectrum of $G(x)-I$. Let δ be an interval extending from $\lambda=\varepsilon$ sufficiently far to the right to cover all points in the spectrum of $G(x)-I$ to the right of $\lambda=\varepsilon$. Then $E(\delta)$ is a projection associated with the interval δ and is necessarily on a manifold of finite dimension. According to RELLICH's theorem, there exists an integer n_0 such that $n>n_0$ implies that the dimensionality of $E_n(\delta)$ is the same as that associated with $E(\delta)$. Furthermore, the points in the spectrum of $E_n(\lambda)$ which are situated in the interval δ approach the corresponding points in the spectrum of $E(\lambda)$ as $n \to \infty$. Let us suppose that there are r such points (including multiplicities). Then we have shown that the (positive) function $\alpha_x^{(i)}$ is continuous at x for $i=1, 2, \ldots, r$. Now δ is an interval whose left end point is at $\lambda=\varepsilon$. Since ε is arbitrary, we see that all $\alpha_x^{(i)}$ which are positive at x are continuous at x. In a similar fashion one may show that if $\alpha_x^{(i)}$ is negative at x, it is continuous there.

Suppose now that the index i is such that at x, $\alpha_x^{(i)}=0$. According to our definition of the function, we have for all y either $\alpha_y^{(i)} \geq 0$ or $\alpha_y^{(i)} \leq 0$. Let us treat the former case. If for all x_n, $\alpha_{x_n}^{(i)}=0$, then continuity at x is obvious. If $\alpha_{x_n}^{(i)} \neq 0$ for some n, then, by the preceding discussion, we may take n_0 so large that $n>n_0$ implies that $\alpha_{x_n}^{(i)}$ falls outside the interval δ and hence $\alpha_{x_n}^{(i)}<\varepsilon$. This implies continuity. We thus have

Theorem 3. *Let $G(x)$ satisfy the fundamental hypotheses. Then it is possible to define for all $x \neq 0$ continuous functions $\alpha_x^{(i)}$, $i=1, 2, \ldots$, such that these functions represent the non-zero characteristic values of $G(x)-I$, multiplicities being taken into consideration. The integers i may be divided into two classes so that the functions $\alpha_x^{(i)}$ of one class form a descending sequence of non-negative functions and the functions $\alpha_x^{(i)}$ of the second class form an ascending sequence of non-positive functions.*

IV. The Continuity of the Infinite Product.

As has been indicated before, the computation of volumes involves the infinite product of the characteristic values of $G(x)$. In this infinite product, we may introduce or eliminate the factor 1 as often as we wish without changing the value of the product. Thus we are considering the product $D(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \alpha_x^{(i)})$ where $\alpha_x^{(i)}$ are the functions introduced in the preceding section. This product converges absolutely since condition d) of the fundamental hypothesis insures the convergence of $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_x^{(i)}|$.

We shall show that $D(x)$ is a bounded continuous function of x.

First, suppose that $\{\beta_n\}$ is a sequence of real numbers such that $\sum |\beta_i| = \beta < 1$. Then clearly, $\prod_{i=1}^{\infty} (1 - \beta_i) \leq \prod_{i=1}^{\infty} (1 + |\beta_i|) \leq \exp(\beta)$. Similarly, $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + \beta_i) \geq \prod_{i=1}^{\infty} (1 - |\beta_i|) \geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} |\beta_i|$. This latter inequality is immediately established by induction for a product with n factors and follows by continuity in the infinite case.

Let us now consider the function $D(x)$. Let ε, $1 > \varepsilon > 0$, be given and let x be fixed. By the lemma preceding theorem 2, we may find a $\delta > 0$ and an integer n such that $||y - x|| < \delta$ implies $\sum_{n+1}^{\infty} |\alpha_y^{(i)}| < \varepsilon$. Now we have $1 - \varepsilon \leq \prod_{n+1}^{\infty} (1 + \alpha_y^{(i)}) \leq \exp(\varepsilon)$. We may write $D(y) = \prod_{1}^{n} (1 + \alpha_y^{(i)}) \cdot \prod_{n+1}^{\infty} (1 + \alpha_y^{(i)})$. The $\alpha_y^{(i)}$ are continuous functions of y by theorem 3. Thus in a suitable neighborhood of x, $\prod_{1}^{n} (1 + \alpha_y^{(i)})$ differs little from $\prod_{1}^{n} (1 + \alpha_x^{(i)})$. From these various facts it is easy to deduce the continuity of $D(x)$.

One may also see that $D(x)$ is bounded. This may be seen from the inequalities $|D(x)| = \prod_{1}^{\infty} (1 + \alpha_x^{(i)}) \leq \prod_{1}^{\infty} (1 + |\alpha_x^{(i)}|) \leq \exp\left(\sum_{1}^{\infty} |\alpha_x^{(i)}|\right) \leq \exp(K)$. We have therefore proved

Theorem 4. *The function* $D(x) = \prod_{1}^{\infty} (1 + \alpha_x^{(i)})$ *is a bounded and continuous function of* x.

V. On the Inverse Transformation.

We shall now prove a theorem of great importance to our development. This result was obtained by the author for Banach spaces under conditions which are both more general and more restrictive than the ones which we use here[8]). Since many of the phenomena we deal with are special to this situation we give the proof in full.

We have seen that given the family of self-adjoint transformations $G(x)$, one may introduce the function $G(x)$ defined by $2G(x) = (G(x)\,x, x)$. Further-

[8]) Loc. cit. [5]).

more, $G(x)$ is twice differentiable and for its derivatives we have $G_y(x) = (\mathcal{G}(x)x, y)$ and $G_{yz}(x) = (\mathcal{G}(x)y, z)$. For a fixed x, $G_y(x)$ represents a linear functional on the Hilbert space $\boldsymbol{H}$; according to a theorem of Fréchet this linear functional is generated by the inner product with y of a fixed element in $\boldsymbol{H}$; this fixed element is $\mathcal{G}(x)x$. In the above cited paper we have shown that the mapping $x \to G_x(x)$ is a homeomorphism of the given Banach space onto its conjugate space. We shall show now that the mapping

$$x \to x^* = \mathcal{G}(x)x \tag{5}$$

is a homeomorphism of Hilbert space into itself (we define the image of 0 to be 0).

We start by showing that the map (5) is one-to-one. In the first place, for $x \neq 0$ and $t > 0$, it is impossible that $\mathcal{G}(tx)tx = \mathcal{G}(-x)(-x)$. For such an equality implies that $t(\mathcal{G}(x)x, x) + (\mathcal{G}(-x)x, x) = 0$ which is impossible since by the fundamental hypothesis b), $(\mathcal{G}(x)x, x) > 0$ and $(\mathcal{G}(-x)x, x) > 0$.

Now suppose that for some $x \neq 0$ and for some z, $\mathcal{G}(x+z)(x+z) = \mathcal{G}(x)x$. Let us write this equality in the form $G_y(x+z) = G_y(x)$. By the law of the mean of the differential calculus one has for $0 < \vartheta < 1$

$$G_y(x+z) = G_y(x) + G_{yz}(x+\vartheta z).$$

Since by hypothesis $G_y(x+z) = G_y(x)$, we have $G_{yz}(x+\vartheta z) = 0$ and in particular for $y = z$, $G_{zz}(x+\vartheta z) = 0$. We have seen immediately above that $x + \vartheta z \neq 0$. Thus from our assumptions on $\mathcal{G}(x)$ it follows that $z = 0$. Hence the map (5) is one-to-one.

To prove that the range of the map $x \to x^*$ coincides with the Hilbert space we shall prove three lemmas.

Lemma. *Let $f(y)$ be a non-zero bounded linear functional and suppose that* l.u.b. $_{\varphi(y)=1} f(y) = \lambda$. *If there is a point x for which $\varphi(x) = 1$ (where $\varphi^2(x) = 2G(x)$) and such that $f(x) = \lambda$, then $f(y) = \lambda G_y(x)$.*

We note in passing that since $L||y||^2 \leq \varphi^2(y) \leq M||y||^2$, every functional $f(y)$ is bounded on $\varphi(y) = 1$. Suppose first that $\lambda = 1$. Then we have $f(x) = \varphi(x)$; $f(x \pm \alpha y) \leq \varphi(x \pm \alpha y)$. Now if $\alpha > 0$,

$$\frac{\varphi(x-\alpha y) - \varphi(x)}{-\alpha} \leq \frac{f(x-\alpha y) - f(x)}{-\alpha} = f(y)$$

$$= \frac{f(x+\alpha y) - f(x)}{\alpha} \leq \frac{\varphi(x+\alpha y) - \varphi(x)}{\alpha}.$$

Letting $\alpha \to 0$ and noting that $\varphi^2(x) = 2G(x)$ we see that

$$f(y) = d/d\alpha\,[2G(x+\alpha y)]_{\alpha=0}^{\frac{1}{2}} = \varphi^{-1}(x)\,G_y(x) = G_y(x).$$

This proves the lemma if $\lambda = 1$ and the general case is an obvious consequence of the homogeneity of $\varphi(y)$.

We shall say that the surface $\varphi(x) = 1$ is uniformly convex if for two vectors x, y such that $\varphi(x) = \varphi(y) = 1$, the inequality $\varphi(x-y) \geq \varepsilon$ implies that $\varphi(x+y) \leq 2 - \delta$ where δ is a function of ε only. We now prove the

Lemma. *The surface* $\varphi(x)=1$ *is uniformly convex.*

Applying the law of the mean to the function of t:

$$G(z+tw)+G(z-tw),$$

we have

$$G(z+w)+G(z-w)=2G(z)+\tfrac{1}{2}[G_{ww}(z+\vartheta w)+G_{ww}(z-\vartheta w)],\quad 0<\vartheta<1.$$

This gives, using the fundamental hypothesis,

$$\varphi^2(z+w)+\varphi^2(z-w)\geqq 2\varphi^2(z)+2L\,||w||^2.$$

Write $x=z+w$, $y=z-w$. Then since $\varphi(x)=\varphi(y)=1$ by hypothesis, and using the fundamental hypothesis once more, we have

$$1-\varphi^2(z)\geqq L\,||w||^2\geqq L\,M^{-1}\varphi^2(w).$$

Since $\varphi(x-y)>\varepsilon$ by hypothesis we have $4-LM^{-1}\varepsilon^2\geqq\varphi^2(x+y)$, which implies uniform convexity.

Lemma. *If* $f(y)$ *is a non-zero bounded linear functional and if* $\underset{\varphi(y)=1}{\text{l.u.b.}} f(y)=\lambda$, *then there is an* x *with* $\varphi(x)=1$ *such that* $f(x)=\lambda$.

Let $\{x_n\}$ be any sequence such that $\varphi(x_n)=1$ and $f(x_n)\to\lambda$. We note that $\lim_{n,m\to\infty}||x_n-x_m||=0$ if and only if $\lim_{n,m\to\infty}\varphi(x_n-x_m)=0$. Now to prove that $\{x_n\}$ is a convergent sequence, let us suppose that for some $\varepsilon>0$ and for two indices n,m, $\varphi(x_n-x_m)\geqq\varepsilon$. Then by uniform convexity, $\varphi(x_n+x_m)\leqq 2-\delta(\varepsilon)$ and hence $f(x_n+x_m)\leqq\lambda(2-\delta)$. This argument shows that $\{x_n\}$ is a convergent sequence and if it converges to x, obviously, $\varphi(x)=1$ and $f(x)=\lambda$.

It may be seen that the mapping $x\to x^*$ is continuous for we have

$$\begin{aligned}||G(x)\,x-G(y)\,y||&=||G(x)\,x-G(x)\,y+G(x)\,y-G(y)\,y||\\&\leqq||G(x)||\,||x-y||+||G(x)-G(y)||\,||y||,\end{aligned}$$

and the quantity $||G(x)-G(y)||$ is by hypothesis small when $||x-y||$ is small.

We show now that if $\{G(z_n)\,z_n\}$ is a fundamental sequence then $\{z_n\}$ also is a fundamental sequence. For this purpose we write $G_{\cdot}(z_n)$ instead of $G(z_n)\,z_n$. We have by the law of the mean with $0<\vartheta<1$

$$G_{z_n-z_m}(z_n)=G_{z_n-z_m}(z_m+[z_n-z_m])=G_{z_n-z_m}(z_m)+G_{z_n-z_m\,z_n-z_m}(z_m+\vartheta[z_n-z_m]).$$

Hence, denoting with $||G_{\cdot}(z_n)-G_{\cdot}(z_m)||$ the norm of the linear functional $G_y(z_n)-G_y(z_m)$ we may write

$$||z_n-z_m||\,||G_{\cdot}(z_n)-G_{\cdot}(z_m)||\geqq|G_{z_n-z_m\,z_n-z_m}(z_m+\vartheta[z_n-z_m])|\geqq L\,||z_n-z_m||^2$$

and therefore $||G_{\cdot}(z_n)-G_{\cdot}(z_m)||\geqq L||z_n-z_m||$. Since the quantity on the left approaches zero with $n,m\to\infty$, so does $||z_n-z_m||$, that is, $\{z_n\}$ is a fundamental sequence.

The above argument allows us to conclude that the mapping $x^* \to x$ is continuous, for if $\mathcal{G}(z_n) z_n \to \mathcal{G}(z) z$, then $z_n \to z$. Thus we have completed the proof of

Theorem 5. *If $\mathcal{G}(x)$ satisfies the fundamental hypotheses, the mapping $x \to x^* = \mathcal{G}(x) x$ is a homeomorphism of the Hilbert space* $\boldsymbol{H}$.

We now turn to a consideration of the transformation inverse to $\mathcal{G}(x)$. Since $L||y||^2 \leqq (\mathcal{G}(x) y, y) \leqq M||y||^2$, it is clear that $\mathcal{G}^{-1}(x)$ exists, is a bounded linear positive definite self-adjoint transformation and satisfies $M^{-1}||y||^2 \leqq (\mathcal{G}^{-1}(x) y, y) \leqq L^{-1}||y||^2$. Let us write

$$\mathcal{G}^{-1}(x) = \mathcal{H}(x^*) \tag{6}$$

where $x^* = \mathcal{G}(x) x$. Since the relation $x \to x^*$ is a homeomorphism, (6) is unambiguous. We proceed to consider the conditions (a) to (e) of the fundamental hypotheses for the transformations $\mathcal{H}(x^*)$.

Since $\mathcal{G}(x)$ is homogeneous of degree zero, $x^* = \mathcal{G}(x) x$ implies for $t > 0$ that $(tx)^* = \mathcal{G}(tx) tx = t\mathcal{G}(x) x = tx^*$. Thus $\mathcal{H}(x^*) = \mathcal{G}^{-1}(x) = \mathcal{G}^{-1}(tx) = \mathcal{H}(tx)^* = \mathcal{H}(tx^*)$, that is, $\mathcal{H}(x^*)$ is positively homogeneous of degree zero. This proves (a).

The proof of (b) has been given above.

Suppose x^* and y' are vectors in $\boldsymbol{H}$. In this paragraph we represent the homeomorphic map by $x \leftrightarrow x^*$ to distinguish it from convergence, say, $x \to 0$. Let $y' \to 0$, that is, $x^* + y' \to x^*$. Suppose that under the homeomorphism (5) we have $x \leftrightarrow x^*$ and $x + y \leftrightarrow x^* + y'$, that is $(x+y)^* = x^* + y'$. Then by the continuity of the homeomorphism, $y' \to 0$ implies $y \to 0$.

We shall show that $\lim_{y' \to 0} ||\mathcal{H}(x^* + y') - \mathcal{H}(x^*)|| = 0$; that is, we shall show that $\lim_{y \to 0} ||\mathcal{G}^{-1}(x+y) - \mathcal{G}^{-1}(x)|| = 0$. By (c), $\mathcal{G}(x)$ is continuous in this sense; we have to show that $\mathcal{G}^{-1}(x)$ has that property. Thus to prove our contention, it is sufficient to show that if $\{A_n\}$ is a sequence of transformations converging uniformly to A, and if A_n^{-1} and A^{-1} exist, then $\{A_n^{-1}\}$ converges uniformly to A^{-1}. Now from the identity $A_n^{-1} - A^{-1} = A_n^{-1}(A - A_n) A^{-1}$ we obtain $||A_n^{-1} - A^{-1}|| \leqq ||A_n^{-1}||\, ||A - A_n||\, ||A^{-1}||$ and this proves our contention. Thus $\mathcal{H}(x^*)$ enjoys property (c).

Let us examine (d). It is obvious that since $\mathcal{G}(x)$ has a pure point spectrum with $\lambda = 1$ as the only possible limit point, $\mathcal{G}^{-1}(x)$ has the same property and thus $\mathcal{H}(x^*) - I$ is completely continuous. If $1 + \alpha_x^{(i)}$ is a characteristic value of $\mathcal{G}(x)$ then $L \leqq 1 + \alpha_x^{(i)}$. The corresponding characteristic value of $\mathcal{G}^{-1}(x)$ is $1 + \beta_x^{(i)} = (1 + \alpha_x^{(i)})^{-1}$. Thus $\beta_x^{(i)} = -\alpha_x^{(i)}(1 + \alpha_x^{(i)})^{-1}$ and $\sum_1^\infty |\beta_x^{(i)}| \leqq L^{-1} \sum_1^\infty |\alpha_x^{(i)}| \leqq L^{-1} K$ since $\sum_1^\infty |\alpha_x^{(i)}| \leqq K$ by hypothesis.

We now prove the continuity of $|||\mathcal{H}(x^*)|||$. Since $x \to x^*$ is a homeomorphism, it will suffice to prove the continuity in x of $|||\mathcal{G}^{-1}(x)|||$. Choose a neighborhood of x and an integer n so that for y in this neighborhood $\sum_{n+1}^\infty |\alpha_x^{(i)}| < \varepsilon < 1/2$ where ε is a preassigned positive number. This is possible

by virtue of the lemma which precedes theorem 2. Then

$$\sum_{n+1}^{\infty} |\beta_y^{(i)}| = \sum_{n+1}^{\infty} |\alpha_y^{(i)}| \, (1 + \alpha_y^{(i)})^{-1} \leq 2 \sum_{n+1}^{\infty} |\alpha_y^{(i)}| < 2\varepsilon .$$

Also

$$\left(\sum_{1}^{\infty} |\beta_y^{(i)}| - \sum_{1}^{\infty} |\beta_x^{(i)}| \right)' \leq \left| \left(\sum_{1}^{n} |\beta_y^{(i)}| - \sum_{1}^{n} |\beta_x^{(i)}| \right)' \right| + \sum_{n+1}^{\infty} |\beta_y^{(i)}| + \sum_{n+1}^{\infty} |\beta_x^{(i)}| .$$

The last two terms are each less than 2ε and the first term on the right may be made less than ε by appropriately restricting the neighborhood of x. This proves the continuity of $|||\mathcal{G}^{-1}(x)|||$ and hence of $|||\mathcal{H}(x^*)|||$ and therefore establishes (d) for $\mathcal{H}(x^*)$.

It would seem that the validity of (e) for $\mathcal{G}(x)$ in the presence of the other conditions of the hypothesis, would imply the validity of (e) for $\mathcal{H}(x^*)$. That is, the existence of a certain number of derivatives for the transformation should yield approximately an equal for the inverse transformation. For purposes of symmetry in our treatment, we specify the existence for $\mathcal{H}(x^*)$ of the differentiability property given in (4). That is, *we extend our fundamental hypothesis to include the condition on* $\mathcal{G}(x)$ *that*

(f) *For every* $x^* \neq 0$, y^*, *and* z^* *in* $\boldsymbol{H}$,

$$\lim_{t \to 0} t^{-1} ([\mathcal{H}(x^* + t z^*) - \mathcal{H}(x^*)] \, y^*, z^*) = 0 . \tag{7}$$

Now it is an easy matter to prove that $\mathcal{H}(x^*)$ satisfies both (4) and (7). The statement that $\mathcal{H}(x^*)$ satisfies (4) is given by (7). We shall show that the condition on $\mathcal{H}(x^*)$ that (7) be satisfied is given by (4).

Indeed, the transformation $x \to x^* = \mathcal{G}(x) \, x$ is an involution. This is so, since $x^* \to x^{**} = \mathcal{H}(x^*) \, x^*$ but $\mathcal{H}(x^*) = \mathcal{G}^{-1}(x)$ and $x^* = \mathcal{G}(x) \, x$, hence $x^{**} = \mathcal{G}^{-1}(x) \, \mathcal{G}(x) \, x = x$. Thus if $\mathcal{J}(x^{**})$ is the family of self-adjoint transformations associated with x^{**} by means of $\mathcal{J}(x^{**}) = \mathcal{H}^{-1}(x^*)$, we have $\mathcal{J}(x) = \mathcal{J}(x^{**}) = \mathcal{H}^{-1}(x^*) = \mathcal{G}(x)$. This concludes the proof that condition (7) for $\mathcal{H}(x^*)$ is given by (4). We summarize these results in

Theorem 6. *Let* $\mathcal{G}(x)$ *be a family of self-adjoint transformations which satisfy the hypotheses* (a) *to* (f) *inclusive. Let* $\mathcal{H}(x^*)$ *be defined by* $\mathcal{H}(x^*) = \mathcal{G}^{-1}(x)$ *where* x^* *is given by the homeomorphism of* $\boldsymbol{H}$ *into itself:* $x \leftrightarrow x^* = \mathcal{G}(x) \, x$. *Then the family* $\mathcal{H}(x^*)$ *also satisfies the conditions* (a) *to* (f).

VI. The Adjoint (Polar) Body.

Let $\mathcal{G}(x)$ be a family of self-adjoint transformations which satisfies the fundamental hypotheses. We have seen that we may define a body $\mathfrak{K}$ by means of the inequality $2G(x) \leq 1$ where $G(x)$ is given by $2G(x) = (\mathcal{G}(x) \, x, x)$. The body $\mathfrak{K}$ has been shown to be convex [9]). Proceeding from $\mathcal{G}(x)$ to $\mathcal{H}(x^*)$ we may introduce a body $\mathfrak{K}^*$ defined by the inequality $2H(x^*) \leq 1$ where $H(x^*)$ is given by $2H(x^*) = (\mathcal{H}(x^*) \, x^*, x^*)$. The body $\mathfrak{K}^*$ is called the adjoint

[9]) Loc. cit. [3]), p. 247.

or polar body of $\mathfrak{R}$. We have seen in the preceding section that the homeomorphism $x \to x^*$ is of period two and that the passage from $\mathcal{H}(x^*)$ to $\mathcal{J}(x^{**})$ yields $\mathcal{G}(x)$ once more. Thus $\mathfrak{R}^{**} = \mathfrak{R}$.

VII. Preliminary Definition of Volume.

We shall give now a preliminary discussion of the definition of volume. The question of the definition of the integral will be deferred to the next section. We begin with the finite dimensional case.

Let $\boldsymbol{H}$ be a space of dimension n and let $G(x)$, $\mathcal{G}(x)$, $\mathcal{H}(x^*)$, $\mathfrak{R}$ and $\mathfrak{R}^*$ be as before except that the value of the exponent r is not to be fixed at $r = 2$. In this situation we have given a formula for the volume of $\mathfrak{R}^*$ which is as follows[10]):

$$V(\mathfrak{R}^*) = \lim_{r \to 1} 1/[n(r-1)] \int_{\Omega} D(x)\, d\Omega .$$

Here Ω represents the surface of the unit sphere in n-space and $d\Omega$ is the element of area on the surface (hypersurface) of the sphere. The function $D(x)$ is usually written in the form of a determinant—the determinant of the matrix associated with the transformation $\mathcal{G}(x)$. The order of definition of the various quantities above is as follows: First, $\mathfrak{R}$ is defined by means of an inequality $\varphi(x) \leqq 1$ where $\varphi(x)$ is positively homogeneous of order 1. Then $r > 1$ is chosen and $G(x)$ is defined by $rG(x) = [\varphi(x)]^r$. This leads in turn to the definition of the transformations $\mathcal{G}(x)$ and $\mathcal{H}(x^*)$ in the way we have already indicated.

The concept of volume has been extended by us to that of the "volume of order r" for a fixed r, $1 \leqq r \leqq \infty$[11]). This is done as follows for the cases $1 < r < \infty$. Choose $\mathfrak{R}$ defined by $\varphi(x) \leqq 1$ as above and choose a fixed value of r in the given range. Then with $G(x)$, $\mathcal{G}(x)$, $\mathcal{H}(x^*)$ defined as in the preceding paragraph we define the volume of order r of $\mathfrak{R}^*$, $V_r(\mathfrak{R}^*)$, by the equation

$$V_r(\mathfrak{R}^*) = \left[1/[n(r-1)] \int_{\Omega} D(x)\, d\Omega\right]^{1/r}. \tag{8}$$

For various reasons, the question of volumes in Hilbert space seems interesting principally for the case $r = 2$. Thus our entire development is based on this value of the parameter. We shall define the volume of order 2 of the body $\mathfrak{R}^*$ using the formula (8) as a guide. We state forthwith that the factor $1/n$ arises in the n-dimensional case only because finite dimensional integration theory has an inductive structure; that is, there are relations between an integration in n dimensions and one in fewer than n dimensions (e.g. — Fubini's theorem). In Hilbert space, no such relation seems a priori desirable or, for that matter, feasible. Thus in contructing our formula for

[10]) Loc. cit. [3]), pp. 261, 262.
[11]) Loc. cit. [4]), p. 27.

Hilbert space, we suppress the factor $1/n$. We introduce therefore our definition of the volume or order 2 of the body $\mathfrak{R}^*$ by means of

$$V_2(\mathfrak{R}^*) = \left[\int_{\Omega} D(x)\, d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

In this formula, $D(x)$ is the bounded continuous function whose existence has been proved in IV. $\mathfrak{R}^*$ is the polar body whose existence and definition were considered in V and VI. Ω represents the surface of the unit sphere. It remains to consider the very critical question of the interpretation to be given to the integration.

VIII. Integrands and Integrals.

Prior to defining an integral, one must have a precise notion of the structure of the class of functions to be integrated, the integrands. In general, there is considerable division of opinion on the desirable structure of the class of integrands and also on the notion of integral over such a class. However, the coming discussion will suggest that there is much more uniformity in view-points on the latter than on the former question. It should be stated further that the present definitions are not being proposed to the exclusion of others. Rather they are being put forward because they are convenient for our purposes. Furthermore, the definitions are definitely tentative since there is required a thorough study of various problems before anything of a more definitive nature can be enunciated. The nature of some of these problems will be seen.

The functions which we shall wish to integrate will be, by assumption, continuous and bounded over the Hilbert unit sphere. The class $\boldsymbol{B}$ of integrable functions will be assumed to constitute a real vector space. Furthermore, we shall introduce into this class a simple topology, that of uniform convergence, and we shall require that $\boldsymbol{B}$ be complete in this (metric) topology. Thus $\boldsymbol{B}$ is assumed to be a Banach space in which the norm of $f(x)$ is defined by $||f|| = \underset{x\in\Omega}{\text{l.u.b.}} |f(x)|$.

In addition, $\boldsymbol{B}$ is also required to be a lattice under this natural ordering of functions. Thus if $f(x)$ and $g(x)$ are in $\boldsymbol{B}$, so are $f(x) \vee (x) = \max\big(f(x), g(x)\big)$ and $f(x) \wedge g(x) = \min\big(f(x), g(x)\big)$. This is equivalent to requiring that $\boldsymbol{B}$ contain along with $f(x)$ the function $|f(x)|$.

We shall wish to define integrals which are invariant under certain transformations. For that reason, we introduce a group of transformations of Ω into itself. The nature of this group will have a strong influence on the type of integral one wishes to define. There is no a priori reason for choosing one particular group before all others. Furthermore, the difficulties to be encountered will depend greatly on the complexity of this group. For the sake of definiteness, let us assume that the group to be chosen is the group $\mathcal{R}$ of all rotations of the space $\boldsymbol{H}$ into itself. The relation of $\mathcal{R}$ and $\boldsymbol{B}$ is the following. We assume that if $f(x) \in \boldsymbol{B}$, and if $R \in \mathcal{R}$, then $f(Rx) \in \boldsymbol{B}$. Thus "$\boldsymbol{B}$ is closed under the operators in $\mathcal{R}$".

Now let us consider the nature of an integral. In the first place, an integral over $\boldsymbol{B}$ will be a bounded linear functional F. We shall suppose that F is normalized, that is, $||F|| = 1$. Furthermore, F will be assumed positive, that is, $f(x) \geqq 0$ implies $Ff \geqq 0$. (We do not discuss at this point whether F should be strictly positive, that is, whether $f \neq 0$ and $f(x) \geqq 0$ imply $Ff > 0$.) The existence of such functionals in abundance is given by the Hahn-Banach theorem.

It will also be assumed that F is $\mathcal{R}$-invariant. This means that if $f(x) \in \boldsymbol{B}$ and $R \in \mathcal{R}$, then $Ff(x) = Ff(Rx)$. The existence of $\mathcal{R}$ invariant functionals has received some attention from various authors recently. The possible application to the present situation of the results here obtained will be considered on another occasion.

Finally, we shall introduce a condition of F which corresponds to that of a completely additive measure. We use the extremely important work of DANIELL in order to accomplish this. We shall assume that if $\{f_n(x)\}$ is a monotone increasing sequence of non-negative functions in $\boldsymbol{B}$ which converges to a function $f(x)$ also in $\boldsymbol{B}$, then $Ff_n \to Ff$. This will be written in the form

$$f_n(x) \uparrow f(x) \quad \text{implies} \quad Ff_n \to Ff. \tag{10}$$

This condition will be called the "Daniell condition". It results from DANIELL's theory that a functional which satisfies (10) gives rise to a completely additive integral[12]).

Given a space $\boldsymbol{B}$ of the type we have defined, the question of the existence and uniqueness of invariant integrals over $\boldsymbol{B}$ is in general unanswered. If $\boldsymbol{B}$ consists of the constant functions only, the question has a simple affirmative answer (see the next section). On the other hand, if $\boldsymbol{B}$ is the space of all continuous functions over Ω, no invariant integral exists.

Let us return now to the problem of the determination of volumes. If the body is given, call it $\mathfrak{R}^*$, whose volume is to be found, we have set up a mechanism for computing the integrand $D(x)$. Now the problem of finding volumes always involves not one body $\mathfrak{R}^*$ but a class of bodies $\mathfrak{R}_\iota^*$, where ι ranges over some suitable set. Each such body yields a function $D_\iota(x)$. These functions $D_\iota(x)$ generate a space $\boldsymbol{B}$ of continuous functions closed under the transformations of the group $\mathcal{R}$. For this space one solves the integration problem: One determines whether there exists an invariant integral F and whether it is unique. If such is the case, one obtains the volume of the bodies $\mathfrak{R}_\iota^*$ by means of formula (9).

This introduces the question as to how suitably to define a "natural class" of bodies $\mathfrak{R}_\iota^*$. One or two classes of bodies seem to deserve to be called natural, for example, the class of ellipsoids. In the next section we give the simple but interesting solution of the volume problem for this particular class.

[12]) DANIELL, P. J.: A general form of integral. Ann. of Math. **19**, 279—294 (1917/18).

IX. The Volume of Ellipsoids.

We consider as an application of the preceding theory, the problem of determining the volume of an ellipsoid in Hilbert space $\boldsymbol{H}$. Consider an ellipsoid $\mathfrak{K}$ with semi-axes $a_1, a_2, \ldots$. Let $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ represent a complete orthonormal set in $\boldsymbol{H}$ in the direction of the principal axes. If x is an arbitrary vector in $\boldsymbol{H}$, let $(x_1, x_2, \ldots)$ represent the coordinates of x in this orthonormal set. We may write for the defining equation of the ellipsoid $2G(x) = 1$ where

$$2G(x) = (x_1^2/a_1^2) + (x_2^2/a_2^2) + \cdots.$$

It is quickly seen that for the vector $y = (y_1, y_2, \ldots)$ we have

$$G_y(x) = (x_1 y_1)/a_1^2 + (x_2 y_2)/a_2^2 + \cdots,$$

and that the transformation $\mathcal{G}(x)$ is given by $\mathcal{G}(x)\varphi_n = (1/a_n^2)\varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Write $(1/a_n^2) = 1 - \alpha_n$ (previously written $\alpha_x^{(n)}$). Note that α_n is independent of x. Suppose that $\sum_1^\infty |\alpha_n| < \infty$. It is easy to verify that the conditions (a) to (e) of the fundamental hypotheses are satisfied. Furthermore we see that the basic homeomorphism $x \to x^* = \mathcal{G}(x)\,x$ is given by a linear transformation: $(x_1, x_2, \ldots) \to ([x_1/a_1^2], [x_2/a_2^2], \ldots)$. Thus, since $\mathcal{G}(x)$ is independent of x here, $\mathcal{G}(x) = \mathcal{G}$, $\mathcal{H}(x^*) = \mathcal{G}^{-1}$ is independent of x^*. For the conjugate body $\mathfrak{K}^*$ of $\mathfrak{K}$ we have the equation $2H(x^*) = (\mathcal{H}(x^*)\,x^*, x^*) = 1$ where

$$2H(x^*) = a_1^2 x_1^{*2} + a_2^2 x_2^{*2} + \cdots.$$

Thus $\mathfrak{K}^*$ is an ellipsoid with semi-axes $1/a_1, 1/a_2, \ldots$.

Let us now consider the class of all ellipsoids for which $\sum_1^\infty |\alpha_n| < \infty$. This class is convex, closed under the formation of adjoints, and closed under rotations of the space. For any ellipsoid of the class, the function $D(x) = \prod_1^\infty (1 + \alpha_n) = \prod_1^\infty a_n^{-2}$ is a constant and hence the Banach lattice $\boldsymbol{B}$ generated by all $D(x)$ is the space of all constants. On $\boldsymbol{B}$, there is precisely one positive linear functional of norm 1, and it is also an invariant integral. Finally, for the volume of order 2 of $\mathfrak{K}^*$ we obtain

$$V_2(\mathfrak{K}^*) = \left[\int_\Omega D(x)\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\prod_1^\infty a_n\right)^{-1}.$$

Since the semi-axes of $\mathfrak{K}^*$ are the numbers $1/a_n$, we see that the volume is equal to the product of the semi-axes.

Note that although the volume is of order 2 (and not of order 1 as in the classical case) the result is precisely the same, up to a constant factor and except for dimensionality, as that which would be obtained by standard methods for an ellipsoid in n dimensions.

Columbia University, New York City.
Università di Roma.

(Eingegangen am 10. August 1954.)

Jacobs, K.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 408—428 (1955)

Periodizitätseigenschaften beschränkter Gruppen im Hilbertschen Raum.

Von

Konrad Jacobs.

Einleitung.

Die allgemeine Ergodentheorie beschäftigt sich mit den Mittelwerts- und Periodizitätseigenschaften von Gruppen oder auch Halbgruppen $\mathfrak{G}$ linearer Transformationen in linearen topologischen Räumen $\mathfrak{H}$. Als Instrumentarium benützte man anfangs vor allem die Spektraltheorie (vgl. Hopf [*10*]). Inzwischen hat man gelernt, das Mittelwertproblem unabhängig von der Spektraltheorie zu behandeln (Birkhoff [*3*], Alaoglu-Birkhoff [*1*], Eberlein [*8*], Day [*7*], Jacobs [*11*]). In dieser Abhandlung soll gezeigt werden, daß man auch die Periodizitätsprobleme unabhängig von der Spektraltheorie behandeln kann.

Wir beschränken uns zunächst auf den Fall, daß $\mathfrak{H}$ ein Hilbertraum und $\mathfrak{G}$ eine beschränkte Gruppe in $\mathfrak{H}$ ist. Man kann ohne weiteres zeigen, daß die unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren $h \in \mathfrak{H}$ einen abgeschlossenen invarianten Teilraum $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{H}$ bilden. Unser Ziel ist es, den Raum $\mathfrak{P}$ aus dem Raum $\mathfrak{H}$ abzuspalten, d.h. einen zweiten invarianten Teilraum $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{H}$ zu finden, derart, daß $\mathfrak{H}$ direkt in die Räume $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ zerfällt.

Wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ unitär ist, kann man für $\mathfrak{F}$ einfach das orthogonale Komplement von $\mathfrak{P}$ nehmen. Dies Verfahren hat jedoch drei Mängel:

1. Man erhält keine kennzeichnende Eigenschaft für die Vektoren aus $\mathfrak{F}$.

2. Es läßt sich für beschränkte Gruppen nicht mehr anwenden, da das orthogonale Komplement eines invarianten Raums im allgemeinen nicht mehr invariant sein wird.

3. Es läßt sich nicht auf allgemeinere Räume, in denen der Begriff der Orthogonalität nicht mehr erklärt ist, übertragen.

Wir versuchen daher, einen zu $\mathfrak{P}$ komplementären, invarianten Teilraum als die Menge $\mathfrak{F}$ aller Vektoren $h \in \mathfrak{H}$ mit einer passenden Eigenschaft Φ zu erhalten. Die Eigenschaft Φ soll dabei auch für allgemeinere Räume sinnvoll sein und im Gegensatz zur Fastperiodizität stehen.

Zu diesem Zweck definieren wir: Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ heißt ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$, wenn es eine Folge $x_\nu \in \mathfrak{G}$ gibt, derart, daß $x_\nu h$ schwach gegen 0 konvergiert (§ 2, Definition 7). Die Menge aller Fluchtvektoren nennen wir $\mathfrak{F}$. Dann gilt der folgende

Satz. *Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ gestattet genau eine Darstellung*

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P}, \quad f \in \mathfrak{F}. \tag{1}$$

Die beiden Komponenten p, f hängen linear, stetig und invariant von h ab (§ 2, *Hauptsatz*).

Wir können das auch so ausdrücken: $\mathfrak{H}$ zerfällt direkt in die beiden invarianten Teilräume $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$. Ein ähnlicher Satz wurde für unitäre Gruppen von GODEMENT bewiesen (GODEMENT [9]).

Das Kernstück des Beweises für die Existenz einer Zerlegung (1) bildet die Aussage: Die Menge aller Minimalpunkte einer nichtleeren schwach-abgeschlossenen invarianten Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ ist nichtleer und besteht aus lauter fastperiodischen Vektoren (§ 3, Satz 1). Beim Beweis dieser Aussage benötigen wir nur die gleichmäßige Konvexität von $\mathfrak{H}$.

Zum Beweis der Eindeutigkeit ziehen wir die adjungierte Gruppe $\mathfrak{G}^*$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ heran (§ 4, vgl. auch JACOBS [11]). Dementsprechend läßt sich das Ergebnis unserer Untersuchungen auf duale Paare gleichmäßig-konvexer Banachräume $\left(\text{also z.B. } L^p, L^{p'}, \text{ wobei } p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ verallgemeinern. Dies ist im Anhang II näher ausgeführt.

Der § 5 enthält eine Charakterisierung der fastperiodischen Vektoren. Die im Anhang I angegebene Charakterisierung der Fluchtvektoren scheint mir — was die Methode angeht — illustrativ für die Verhältnisse im Hilbertraum zu sein. Leider ist es mir nicht gelungen, die Methode auch auf gleichmäßig-konvexe Räume zu übertragen, und ich habe die betreffenden Ausführungen deshalb nur als Anhang beigefügt.

§ 1. Vorbereitende Betrachtungen.

Wir betrachten einen abstrakten Hilbertraum $\mathfrak{H} = \{f, g, h, \ldots\}$. Wie üblich wird in $\mathfrak{H}$ durch die Festsetzung $|h| = \sqrt{(h, h)}$ eine Norm erklärt. Die zugehörige Topologie wird auch die starke Topologie in $\mathfrak{H}$ genannt. $\mathfrak{H}$ ist vollständig bezüglich der starken Topologie.

In $\mathfrak{H}$ wirke eine beschränkte Gruppe $\mathfrak{G} = \{x, y, \ldots\}$ von linearen Transformationen. Es gibt also eine Zahl $\Gamma > 0$ derart, daß stets

$$|xh| \leq \Gamma |h| \text{ [1]}$$

gilt. Hieraus folgt, daß $\Gamma \geq 1$ ist, und daß auch die umgekehrte Abschätzung gilt:

$$|xh| \geq \frac{1}{\Gamma} |h|. \tag{1}$$

Für jeden Vektor $h \in \mathfrak{H}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}(h)$ die stark-abgeschlossene konvexe Hülle der Menge $\{xh \mid x \in \mathfrak{G}\}$. $\mathfrak{K}(h)$ ist stets eine invariante Menge: Für jedes $x \in \mathfrak{G}$ gilt $x\,\mathfrak{K}(h) \subseteq \mathfrak{K}(h)$. Wie ich in einer früheren Arbeit [11] gezeigt habe, enthält jede Menge $\mathfrak{K}(h)$ genau einen unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ fixen Punkt h_0, welcher der *Fixpunkt des Punktes* h genannt wird.

[1] Hierbei bedeutet xh den aus h durch Anwendung der Transformation x entstehenden Vektor.

In diesem ersten Paragraphen bringen wir einige vorbereitende Aussagen, die unter den gemachten Annahmen gelten. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ kommt dabei nur insoweit zur Geltung, als sie Anlaß zur Einführung einer neuen Norm in $\mathfrak{H}$ gibt (Abschnitt C und D).

A. Totalbeschränkte Mengen.

Definition 1. *Eine Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ heißt totalbeschränkt, wenn man sie beliebig fein endlich überdecken kann, d.h. wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlichviele Punkte $h_1, \ldots, h_n$ in $\mathfrak{H}$ gibt, deren ε-Umgebungen zusammen $\mathfrak{M}$ überdecken: Zu jedem $h \in \mathfrak{M}$ gibt es ein ν derart, daß $|h - h_\nu| < \varepsilon$ gilt* (vgl. ALEXANDROFF-HOPF [2], S. 104).

Beispiel 1. Jede endliche Menge ist totalbeschränkt.

Beispiel 2. Jede nichtbeschränkte Menge in $\mathfrak{H}$ ist auch nicht totalbeschränkt. Ist also $h \in \mathfrak{H}$, $h \neq 0$, so ist die Menge $\{n\,h \mid n = 1, 2, \ldots\}$ nichttotalbeschränkt in $\mathfrak{H}$.

Beispiel 3. Ist $\mathfrak{H}_0$ ein endlichdimensionaler Teilraum von $\mathfrak{H}$, so ist jede beschränkte Teilmenge von $\mathfrak{H}_0$ totalbeschränkt. Dagegen muß sich eine totalbeschränkte Teilmenge von $\mathfrak{H}$ nicht notwendig in einen endlichdimensionalen Teilraum von $\mathfrak{H}$ einbetten lassen. Sei z.B. $\mathfrak{H}$ von unendlicher Dimension, und sei $e_1, e_2, \ldots$ eine Folge von Vektoren aus $\mathfrak{H}$ mit $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$ (δ_{ik} bedeutet das Kroneckersymbol). Dann überzeugt man sich leicht, daß die Menge $\left\{\frac{1}{n} e_n \mid n = 1, 2, \ldots\right\}$ zwar totalbeschränkt, aber in keinem endlichdimensionalen Teilraum von $\mathfrak{H}$ enthalten ist.

Dagegen findet man: Eine beschränkte Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann totalbeschränkt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen endlichdimensionalen Teilraum $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}$ gibt, in dessen ε-Umgebung $\mathfrak{M}$ enthalten ist: Zu jedem $h \in \mathfrak{M}$ gibt es ein $g \in \mathfrak{H}_0$ derart, daß $|h - g| < \varepsilon$ gilt.

Beispiel 4. Ist $\mathfrak{H}$ von unendlicher Dimension und $e_1, e_2, \ldots$ eine Folge von Punkten aus $\mathfrak{H}$ mit $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$, so ist die Menge $\mathfrak{M} = \{e_1, e_2, \ldots\}$ nichttotalbeschränkt in $\mathfrak{H}$. Es gilt ja $|e_i - e_k| = \sqrt{2}$ für $i \neq k$. Daraus folgt, daß man z.B. für $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$ die Definition 1 nicht erfüllen kann.

Wir fassen einige einfache Aussagen über totalbeschränkte Mengen zusammen als

Satz 1.1. *a) Die Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann totalbeschränkt, wenn jede unendliche Folge $h_i \in \mathfrak{M}$ ($i = 1, 2, \ldots$) eine in $\mathfrak{H}$ konvergente Teilfolge besitzt. Ist $\mathfrak{M}$ eine nicht-totalbeschränkte Menge, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $h_i \in \mathfrak{M}$ derart, daß $|h_i - h_k| > \varepsilon$ für $i \neq k$ gilt.*

b) Zugleich mit der Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ ist auch jede Teilmenge von $\mathfrak{M}$ totalbeschränkt.

c) Ist die Menge $\mathfrak{M}$ totalbeschränkt und α eine komplexe Zahl, so ist auch die Menge $\alpha\mathfrak{M}$ totalbeschränkt.

d) Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ totalbeschränkte Mengen in $\mathfrak{H}$, so ist auch die Menge $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}$ totalbeschränkt.

e) Ist die Menge $\mathfrak{M}$ totalbeschränkt in $\mathfrak{H}$ und ist t eine beschränkte lineare Transformation in $\mathfrak{H}$, so ist auch die Menge $t\mathfrak{M}$ totalbeschränkt.

Aus Satz 1.1 b) und Beispiel 4 folgt: In einem unendlichdimensionalen Hilbertraum ist die Einheitskugel $\{h \mid |h| \leq 1\}$ nicht totalbeschränkt.

B. Die schwache Topologie in $\mathfrak{H}$.

Bekannt ist die

Definition 2. *Eine Folge $h_i \in \mathfrak{H}$ heißt schwach-konvergent gegen den Limes $h \in \mathfrak{H}$, in Zeichen*

$$h_i \to h \quad (\textit{schwach})$$

oder

$$\lim_{i\to\infty} h_i = h \quad (\textit{schwach}),$$

wenn $(h_i, f) \to (h, f)$ für jedes $f \in \mathfrak{H}$ gilt (vgl. Nagy [16], S. 10).

Man kann eine entsprechende Definition auch allgemeiner für Filter (vgl. Bourbaki [4]) anstatt Folgen treffen. Wir beschränken uns auf Folgen, um späterhin schärfere Ergebnisse zu erzielen.

Beispiel 5. Jede stark-konvergente Folge ist auch schwach-konvergent mit demselben Limes: Aus $h_i \to h$ folgt $h_i \to h$ (schwach).

Wir schreiben gelegentlich zur besseren Unterscheidung auch $h_i \to h$ (stark) anstatt $h_i \to h$.

Beispiel 6. Ist $\mathfrak{H}$ von unendlicher Dimension und $e_1, e_2, \ldots$ eine Folge von Punkten aus $\mathfrak{H}$, für welche $(e_i, e_k) = \delta_{ik}$ gilt, so ist $e_i \to 0$ (schwach). Denn für ein beliebiges $f \in \mathfrak{H}$ gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(e_i, f)|^2 \leq |f|^2,$$

woraus sofort $(e_i, f) \to 0 = (0, f)$ folgt. Wir werden später sehen (Anhang I, Satz 1), daß diese Folge e_i gewissermaßen den Prototyp einer schwach-konvergenten Folge im Hilbertraum darstellt.

Wir fassen einige bekannte Aussagen über schwach-konvergente Folgen zusammen als

Satz 1.2. *a) Der Limes einer schwach-konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt und hängt linear von der Folge ab. Insbesondere ist also $h_i \to h$ (schwach) äquivalent mit $h_i - h \to 0$ (schwach).*

b) Jede Teilfolge einer schwach-konvergenten Folge ist wieder schwach-konvergent mit demselben Limes.

c) Jede schwach-konvergente Folge ist beschränkt.

Für die Beweise vgl. Nagy [16], S. 10f.

Satz 1.3. *Jede schwach-konvergente Folge von Punkten einer totalbeschränkten Menge ist stark-konvergent mit demselben Limes.*

Beweis. Sei $h_i \to h$ (schwach) und $\{h_i\}$ eine totalbeschränkte Menge. Angenommen, die Aussage $h_i \to h$ (stark) ist falsch. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge k_j der Folge h_i derart, daß stets

$$|k_j - h| \geqq \varepsilon \tag{2}$$

gilt. Wegen der Totalbeschränktheit können wir gleich annehmen (Teilfolge!), daß die Folge k_j stark konvergiert: $k_j \to k$ (stark). Dann gilt wegen (2) sicher

$$|k - h| \geqq \varepsilon. \tag{3}$$

Nun ist nach Beispiel 5 $k_j \to k$ (schwach). Andererseits folgt aus Satz 1.2 b), daß $k_j \to h$ (schwach) gilt. Somit ist wegen Satz 2 a) $k = h$, was mit (3) im Widerspruch steht, q.e.d.

Beispiel 7. Jede schwach-konvergente Folge von Punkten eines endlichdimensionalen Teilraums $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}$ ist auch stark-konvergent mit demselben Limes. Hierzu beachte man Beispiel 3.

Der Inhalt der beiden folgenden Sätze 1.4 und 1.5 ist bekannt (vgl. PETTIS [*18*], S. 249, EBERLEIN [*8*], S. 218f. und ALEXANDROFF-HOPF [*2*], S. 85). Wir geben zwei einfache, auf unseren Fall zugeschnittene Beweise an.

Satz 1.4. *Ist* $\mathfrak{K}_1 \supseteqq \mathfrak{K}_2 \supseteqq \cdots$ *eine absteigende Folge von nichtleeren beschränkten abgeschlossenen konvexen Mengen in* $\mathfrak{H}$, *so ist der Durchschnitt* $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{K}_\nu$ *nichtleer.*

Beweis. Sei

$$\alpha_\nu = \inf_{f \in \mathfrak{K}_\nu} |f|.$$

Dann ist $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ eine monoton wachsende, beschränkte Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Sei

$$\alpha = \lim_{\nu \to \infty} \alpha_\nu.$$

Sei nun $f_\nu \in \mathfrak{K}_\nu$ derart gewählt, daß

$$|f_\nu| < \alpha + \frac{1}{\nu}$$

gilt ($\nu = 1, 2, \ldots$). Dann ist die Folge $f_1, f_2, \ldots$ stark-konvergent. Aus der bekannten Identität

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^2 + \left|\frac{f-g}{2}\right|^2 = \frac{|f|^2 + |g|^2}{2}$$

folgt nämlich für beliebige μ, ν

$$\frac{1}{4}|f_\mu - f_\nu|^2 = \frac{|f_\mu|^2 + |f_\nu|^2}{2} - \left|\frac{f_\mu + f_\nu}{2}\right|^2.$$

Es sei etwa $\mu \geqq \nu$. Dann ist $f_\mu, f_\nu \in \mathfrak{K}_\nu$, also auch $\frac{f_\mu + f_\nu}{2} \in \mathfrak{K}_\nu$, und somit

$$\left|\frac{f_\mu + f_\nu}{2}\right| \geqq \alpha_\nu.$$

Andererseits ist

$$|f_\mu| < \alpha + \frac{1}{\nu}, \qquad |f_\nu| < \alpha + \frac{1}{\nu}.$$

Daraus ergibt sich

$$|f_\mu - f_\nu| \leq 2\sqrt{\left(\alpha + \frac{1}{\nu}\right)^2 - \alpha_\nu^2}$$

und das geht gegen 0. Somit konvergiert die Folge $f_1, f_2, \ldots$ stark gegen einen Punkt f, der wegen der starken Abgeschlossenheit der $\mathfrak{K}_\nu$ in jedem $\mathfrak{K}_\nu$ enthalten sein muß.

Satz 1.5. *Ist $h_1, h_2, \ldots$ eine Folge in $\mathfrak{H}$, derart, daß für jedes $f \in \mathfrak{H}$ die Folge (h_ν, f) konvergiert, und ist $\mathfrak{K}_n$ die abgeschlossene konvexe Hülle der Menge $\{h_n, h_{n+1}, \ldots\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, so enthält $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{K}_\nu$ genau einen Punkt h und es gilt $h_\nu \to h$ (schwach).*

Beweis. Es gilt $\mathfrak{K}_1 \supseteq \mathfrak{K}_2 \supseteq \cdots$. Nach Satz 1.4 enthält $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{K}_\nu$ mindestens einen Punkt h. Man überlegt sich sofort, daß jeder Punkt aus $\bigcap_\nu \mathfrak{K}_\nu$ ein schwacher Limes der Folge $h_1, h_2, \ldots$ ist. Aus Satz 1.2 a) (Eindeutigkeit des schwachen Limes) folgt daher die Behauptung.

Bekannt ist der

Satz 1.6. *a) Zu jeder beschränkten Folge $h_i \in \mathfrak{H}$ gibt es abzählbarviele $g_\nu \in \mathfrak{H}$, derart, daß für jede Teilfolge k_j der Folge h_i aus dem Vorhandensein der Limites*

$$\lim_{j \to \infty} (k_j, g_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

schon die Existenz eines $k \in \mathfrak{H}$ mit

$$k_j \to k \ (\textit{schwach})$$

folgt. (Man kann $g_\nu = h_\nu$ wählen.)

b) Jede beschränkte Folge $h_i \in \mathfrak{H}$ besitzt eine schwach-konvergente Teilfolge. Dies folgt aus a) (vgl. Nagy [*16*], S. 10).

Definition 3. *Wir nennen eine Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ schwach-abgeschlossen, wenn der Limes jeder schwach-konvergenten Folge $h_i \in \mathfrak{M}$ wieder in $\mathfrak{M}$ liegt.*

Anmerkung. Aus Satz 1.5 folgt sofort: Jede konvexe stark-abgeschlossene Menge ist auch schwach-abgeschlossen (Eberlein [*8*], S. 218).

Es ist klar, daß der Durchschnitt eines Systems schwach-abgeschlossener Mengen wieder schwach-abgeschlossen ist. Daher ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition 4. *Die kleinste schwach-abgeschlossene Obermenge $\overline{\mathfrak{M}}$ einer Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ heißt die schwache Hülle von $\mathfrak{M}$.*

Nichttrivial ist nun der

Satz 1.7. *Die schwache Hülle $\overline{\mathfrak{M}}$ einer Menge $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ ist die Menge aller Punkte $h \in \mathfrak{H}$, zu denen es jeweils eine Folge $h_i \in \mathfrak{M}$ gibt, derart, daß $h_i \to h$ (schwach) gilt.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M}'$ die Menge aller Limites von schwach-konvergenten Folgen aus $\mathfrak{M}$. Jedenfalls ist $\mathfrak{M}' \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{M}'$ schon schwach-abgeschlossen ist. Sei also h_i eine Folge von Punkten aus $\mathfrak{M}'$ und $h \in \mathfrak{H}$ derart,

daß $h_i \to h$ (schwach) gilt. Es ist $h \in \mathfrak{M}'$ nachzuweisen. Nun gibt es zu jedem i eine Folge $h_{i1}, h_{i2}, \ldots \in \mathfrak{M}$ derart, daß

$$\lim_{k \to \infty} h_{ik} = h_i \quad \text{(schwach)}$$

gilt. Wir werden zwei Indexfolgen i_μ, k_μ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ derart bestimmen, daß

$$\lim_{\mu \to \infty} h_{i_\mu k_\mu} = h \quad \text{(schwach)} \tag{4}$$

gilt. Damit ist dann $h \in \mathfrak{M}'$ bewiesen.

Nach Satz 1.6 a) gibt es eine Folge $g_\nu \in \mathfrak{H}$ derart, daß aus

$$\lim_{\mu \to \infty} (h_{i_\mu k_\mu} - h, g_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

schon die erwünschte Beziehung (4) folgt. Wir bestimmen nun zu jeder natürlichen Zahl μ

1. eine natürliche Zahl i_μ derart, daß

$$|(h_{i_\mu} - h, g_\nu)| < \frac{1}{2\mu}$$

für alle $\nu \leq \mu$ gilt, und nunmehr bestimmen wir

2. eine natürliche Zahl k_μ derart, daß

$$|(h_{i_\mu k_\mu} - h_{i_\mu}, g_\nu)| < \frac{1}{2\mu}$$

für alle $\nu \leq \mu$ gilt.

Für die so erhaltene Folge $h_{i_\mu k_\mu}$ ergibt sich nun leicht die Gültigkeit von (5), q.e.d.

C. Einführung einer neuen Norm.

Wir betrachten nunmehr die in $\mathfrak{H}$ wirkende beschränkte Gruppe $\mathfrak{G}$. Die Norm $|h|$ ist im allgemeinen nicht invariant unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ (vgl. JACOBS [*11*]). Durch die Festsetzung

$$\|h\| = \sup_{x \in \mathfrak{G}} |xh|$$

erhält man jedoch in $\mathfrak{H}$ eine unter $\mathfrak{G}$ invariante Norm $\|h\|$, von deren Eigenschaften die folgenden hervorgehoben seien:

Satz 1.8. *a) Stets gilt* $\|xh\| = \|h\|$ $(x \in \mathfrak{G},\ h \in \mathfrak{H})$.

b) $\|h\|$ *ist eine stetige Funktion von h (bezüglich der starken Topologie in* $\mathfrak{H}$*).*

c) Stets gilt $|h| \leq \|h\| \leq \Gamma |h|$. *Die neue Normtopologie ist also zur alten äquivalent.*

d) Stets gilt

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$
$$\|\alpha g\| = |\alpha| \cdot \|g\|$$

($f, g \in \mathfrak{H}$, α *eine komplexe Zahl).*

e) Für beliebige $f, g \in \mathfrak{H}$ gilt

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|^2 \leq \frac{\|f\|^2 + \|g\|^2}{2} - \Delta \cdot |f-g|^2,$$

wobei $\Delta = \frac{1}{4\Gamma^2} > 0$ *ist.*

Beim Beweis der Ungleichung e) haben wir die Abschätzung (1) der Gruppe $\mathfrak{G}$ nach unten zu benützen (vgl. JACOBS [11]).

D. Der Minimalteil einer schwach-abgeschlossenen Menge.

Aus Satz 1.5 und Satz 1.8 d) gewinnen wir sofort den

Satz 1.9. *Wenn* $h_i \to h$ *(schwach) gilt, so ist*

$$\|h\| \leq \inf_n [\sup \{\|h_n\|, \|h_{n+1}\|, \ldots\}].$$

Beweis. Sei $\mathfrak{K}_n$ die konvexe abgeschlossene Hülle der Menge $\{h_n, h_{n+1}, \ldots\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Die Punkte der Form

$$f = \frac{1}{m} \sum_{\mu=1}^{m} h_{i_\mu},$$

wobei $i_1, \ldots, i_m$ natürliche Zahlen $\geq n$ sind, liegen dicht in $\mathfrak{K}_n$. Für sie gilt nach Satz 1.8 d)

$$\|f\| \leq \frac{1}{m} \sum_{\mu} \|h_{i_\mu}\| \leq \sup_{i \geq n} \{\|h_i\|\}.$$

Wegen der Stetigkeit der Norm $\|h\|$ [Satz 1.8 b)] gilt diese Abschätzung sogar für alle $f \in \mathfrak{K}_n$. Da nach Satz 1.5 insbesondere h in $\mathfrak{K}_n$ liegt, ist der Satz bewiesen.

Definition 5. *Ist* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ *eine nichtleere Menge und ist* $\alpha = \inf_{f \in \mathfrak{M}} \|f\|$, *so heißt die Menge*

$$\mathfrak{M}_0 = \{f \mid f \in \mathfrak{M},\ \|f\| = \alpha\}$$

der Minimalteil von $\mathfrak{M}$.

Satz 1.10. *Der Minimalteil* $\mathfrak{M}_0$ *einer nichtleeren schwach-abgeschlossenen Menge* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ *ist nichtleer und totalbeschränkt.*

Beweis. I. $\mathfrak{M}_0$ ist nichtleer. Denn da $\mathfrak{M}$ nichtleer ist, gibt es eine Folge $f_i \in \mathfrak{M}$ mit $\|f_i\| \to \alpha$. Nach Satz 1.6 b) können wir die Folge f_i als schwach-konvergent annehmen (Teilfolge!): $f_i \to f$ (schwach).

Da $\mathfrak{M}$ schwach-abgeschlossen ist, ist $f \in \mathfrak{M}$. Nun ist

$$\inf_n \left[\sup_{i \geq n} \{\|f_i\|\}\right] = \alpha.$$

Nach Satz 1.9 ist also $\|f\| \leq \alpha$. Da wegen $f \in \mathfrak{M}$ das $<$-Zeichen nicht in Frage kommt, ist $\|f\| = \alpha$.

II. $\mathfrak{M}_0$ ist totalbeschränkt. Denn wäre $\mathfrak{M}_0$ nicht totalbeschränkt, so gäbe es nach Satz 1.1 a) eine Folge $h_i \in \mathfrak{M}_0$ und ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $|h_i - h_k| \geq \varepsilon$

für $i \neq k$ gilt. Nach Satz 1.6 b) können wir annehmen (Teilfolge!), daß $h_i \to h$ (schwach) gilt. Da $\mathfrak{M}$ schwach-abgeschlossen ist, muß $h \in \mathfrak{M}$ sein. Es ist also

$$\|h\| \geqq \alpha. \tag{6}$$

Wir bilden nun die Folge

$$p_n = \tfrac{1}{2}(h_{2n-1} + h_{2n}) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Man überzeugt sich sofort, daß wiederum

$$p_n \to h \quad \text{(schwach)} \tag{7}$$

gilt. Aus Satz 1.8 e) folgt nun

$$\|p_n\|^2 \leq \frac{\|h_{2n-1}\|^2 + \|h_{2n}\|^2}{2} - \Delta \cdot |h_{2n-1} - h_{2n}|^2$$
$$\leq \alpha^2 - \Delta \cdot \varepsilon^2.$$

Aus Satz 1.9 und (7) ergibt sich

$$\|h\| \leq \sqrt{\alpha^2 - \Delta \cdot \varepsilon^2} < \alpha,$$

was mit (6) nicht verträglich ist. Also ist die Menge $\mathfrak{M}_0$ totalbeschränkt.

§ 2. Fastperiodische Vektoren und Fluchtvektoren. Formulierung des Hauptsatzes.

A. Fastperiodische Vektoren.

Definition 6. *Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ heißt fastperiodisch unter der Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn die Menge $\{xh,\ x \in \mathfrak{G}\}$ totalbeschränkt ist* (vgl. MAAK [13], S. 152). *Die Menge aller unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren $h \in \mathfrak{H}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}$.*

Nahezu trivial ist die Bemerkung: Ist $h \in \mathfrak{H}$ ein unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischer Vektor, so ist für jedes $g \in \mathfrak{H}$ die Funktion $\varphi(x) = (xh, g)$ auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodisch (im v. Neumannschen Sinne; vgl. MAAK [13], S. 152).

Beispiel 8. Der Vektor $0 \in \mathfrak{H}$ ist stets fastperiodisch. Jeder unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ fixe Punkt ist fastperiodisch. Ist $\mathfrak{H}_0$ ein endlichdimensionaler invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$, so ist jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}_0$ fastperiodisch. Ist $\mathfrak{H}$ direkte Summe von endlichdimensionalen invarianten Teilräumen, so ist jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ fastperiodisch. Im allgemeinen werden aber, falls $\mathfrak{H}$ von unendlicher Dimension ist, auch nicht-fastperiodische Vektoren auftreten (vgl. das Beispiel 9 im Abschnitt B dieses Paragraphen).

Satz 2.1. *Die Menge $\mathfrak{P}$ aller unter der beschränkten Gruppe $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren $h \in \mathfrak{G}$ ist ein linearer, abgeschlossener, invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$.*

Beweis. Die Linearität folgt aus Satz 1.1 c), d). $\mathfrak{P}$ ist auch abgeschlossen. Denn sei h_0 ein Häufungspunkt von $\mathfrak{P}$. Zu einem beliebig gewählten $\varepsilon > 0$ bestimmen wir nun a) ein $h \in \mathfrak{P}$ mit

$$|h - h_0| < \frac{\varepsilon}{2\Gamma},$$

wobei $\Gamma \geq 1$, wie immer, eine Schranke der Gruppe $\mathfrak{G}$ bedeutet;

b) endlichviele Punkte $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{H}$ derart, daß es zu jedem $x \in \mathfrak{G}$ ein ν gibt, für welches

$$|x h - f_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt ist. Für dasselbe x und dasselbe ν gilt nun

$$|x h_0 - f_\nu| \leq |x h_0 - x h| + |x h - f_\nu|$$
$$< \Gamma \cdot \frac{\varepsilon}{2\Gamma} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist die Definition 1 auch für die Menge $\{x h_0 | x \in \mathfrak{G}\}$ erfüllt.

$\mathfrak{P}$ ist ferner invariant. Denn ist $h \in \mathfrak{P}$ und $a \in \mathfrak{G}$ beliebig, so ist

$$\{x(a h) | x \in \mathfrak{G}\} = \{x h | x \in \mathfrak{G}\}.$$

Also gilt auch $a h \in \mathfrak{P}$.

Den Raum $\mathfrak{P}$ der unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischen Vektoren kann man nun mittels der bekannten Methoden aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen behandeln (vgl. Maak [*14*]). Man kann die Existenz und Eindeutigkeit eines Mittelwerts (d.h. Fixpunkts; vgl. § 1) nach einem von der Birkhoffschen Minimalmethode grundverschiedenen Verfahren gewinnen, vor allem durch Anwendung des sog. Verheiratungssatzes (vgl. Maak [*13*], S. 234f.). Nach dem Hauptsatz der Theorie der fastperiodischen Funktionen zerfällt $\mathfrak{H}$ in endlichdimensionale invariante irreduzible Teilräume.

B. Fluchtvektoren.

Definition *7. Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ heißt ein Fluchtvektor unter der Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn es eine Folge $x_\nu \in \mathfrak{G}$ gibt, derart, daß $x_\nu h \to 0$ (schwach) gilt. Die Menge aller Fluchtvektoren unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}$.*

Beispiel 9. Der Vektor $0 \in \mathfrak{H}$ ist unter jeder Gruppe ein Fluchtvektor. Ist $\mathfrak{H}$ von abzählbarer Dimension und

$$\ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots$$

eine orthonormierte Basis von $\mathfrak{H}$, so ist durch die Festsetzung $t e_\nu = e_{\nu+1}$ in $\mathfrak{H}$ eine unitäre Transformation t definiert, welche eine unendliche zyklische unitäre Gruppe $\mathfrak{G} = \{t^\nu | \nu = 0, \pm 1, \ldots\}$ erzeugt. Hier ist jedes $h = e_n$ ($n = 0, \pm 1, \ldots$) ein Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$. Denn wählt man $x_\nu = t^\nu \in \mathfrak{G}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), so ist $x_\nu h = t^\nu e_n = e_{n+\nu}$. Nach § 1 Beispiel 6 gilt nun $x_\nu h \to 0$ (schwach). Man kann leicht beweisen, daß $\mathfrak{H}$ überhaupt nur aus Fluchtvektoren besteht. Dies folgt auch aus dem später zu beweisenden Satz 4.3.

Satz 2.2. *Ein von $0 \in \mathfrak{H}$ verschiedener Fluchtvektor ist nie fastperiodisch, d.h. es ist $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \{0\}$.*

Beweis. Sei $h \in \mathfrak{H}$ ein fastperiodischer Fluchtvektor unter der Gruppe $\mathfrak{G}$. Es gibt also eine Folge $x_\nu \in \mathfrak{G}$ derart, daß $x_\nu h \to 0$ (schwach) gilt. Die Folge $x_\nu h$ verläuft in der totalbeschränkten Menge $\{x h | x \in \mathfrak{G}\}$. Nach § 1 B, Satz 1.3 gilt also auch $x_\nu h \to 0$ (stark), d.h.

$$|x_\nu h| \to 0. \tag{1}$$

Andererseits ist stets

$$|x_\nu h| \geq \frac{1}{\Gamma}|h|, \tag{2}$$

wobei $\Gamma \geq 1$ die Schranke von $\mathfrak{G}$ bedeutet. (1) und (2) vertragen sich aber nur, wenn $h = 0$ ist.

Anmerkung. Nach Satz 2.2 ist Beispiel 9 ein Beispiel für das Auftreten nicht-fastperiodischer Vektoren in $\mathfrak{H}$.

Aus Satz 1.5 und aus der im Anschluß an die Definition 3 gemachten Bemerkung ergibt sich sofort der Beweis für den

Satz 2.3. *Jeder Fluchtvektor hat den Fixpunkt* $0 \in \mathfrak{H}$. (Vgl. § 1, auch Anhang I.)

Natürlich können auch fastperiodische, von $0 \in \mathfrak{H}$ verschiedene Vektoren den Fixpunkt 0 haben. Die Fluchtvektoren haben aber den Fixpunkt 0 offenbar in ausgezeichneter Weise.

Es wird sich später herausstellen, daß die Menge $\mathfrak{F}$ genau so wie die Menge $\mathfrak{P}$ ein linearer, abgeschlossener, invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$ ist (Satz 4.3). Diese Aussage wird für unsere Zwecke von besonderer Bedeutung sein. Die Invarianz und die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{F}$ ist leicht direkt zu zeigen. Dagegen stoßen wir bei der Linearität auf folgende Schwierigkeit: Angenommen, f und g sind Fluchtvektoren, und x_ν, y_ν sind zwei Folgen aus $\mathfrak{G}$ derart, daß $x_\nu f \to 0$ (schwach) und $y_\nu g \to 0$ (schwach) gilt. Wie soll man eine Folge $z_\nu \in \mathfrak{G}$ bestimmen, derart, daß $z_\nu(f+g) \to 0$ (schwach) gilt?

Eine Methode, welche diese Schwierigkeit umgeht, werden wir in § 4 angeben. Die Invarianz und die Abgeschlossenheit der Menge $\mathfrak{F}$ wird sich dabei von selbst ergeben. Wir verzichten daher hier auf einen unmittelbaren Beweis dieser Tatsachen.

C. Formulierung des Hauptsatzes.

Das Ziel unserer Untersuchungen ist der folgende

Hauptsatz. *Jeder Vektor* $h \in \mathfrak{H}$ *läßt sich auf genau eine Weise in der Form*

$$h = p + f, \qquad p \in \mathfrak{P}, \qquad f \in \mathfrak{F} \tag{3}$$

darstellen. Die Vektoren p *und* f *hängen linear, starkstetig und invariant von* $h \in \mathfrak{H}$ *ab.*

Wir werden in § 3 die Existenzaussage dieses Satzes beweisen: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ läßt sich auf mindestens eine Weise in der Form (3) darstellen; dabei ist stets $p \in \mathfrak{R}(h)$ (Satz 3.2). Hinsichtlich der Eindeutigkeit beachten wir zunächst den folgenden

Satz 2.4. *Ist* $\mathfrak{F}$ *subtraktiv abgeschlossen, d.h. ist*

$$\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F},$$

so ist für jedes $h \in \mathfrak{H}$ *die Zerlegung* (3) *eindeutig bestimmt (unabhängig davon, ob die Existenzaussage des Hauptsatzes richtig ist).*

Beweis. Sei $\mathfrak{F}$ subtraktiv abgeschlossen. Daß $\mathfrak{P}$ subtraktiv abgeschlossen ist, wissen wir bereits aus Satz 2.1. Seien

$$h = p + f, \qquad p \in \mathfrak{P},\ f \in \mathfrak{F},$$

$$h = p' + f', \qquad p' \in \mathfrak{P},\ f' \in \mathfrak{F}$$

zwei Zerlegungen desselben Vektors $h \in \mathfrak{H}$. Dann folgt durch Subtraktion

$$p - p' = f' - f \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{F}.$$

Nach Satz 2.2 ist in $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{F}$ nur der Vektor $0 \in \mathfrak{H}$ enthalten, also ist

$$p - p' = f' - f = 0,$$

d.h. die beiden Zerlegungen stimmen überein.

Wir werden in § 4 die folgende Aussage beweisen: $\mathfrak{F}$ ist ein abgeschlossener invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$ (Satz 4.3). Damit wird der Beweis für die Eindeutigkeit der Zerlegung (3) vollendet sein. Beim Beweis jener Aussage werden wir von der Richtigkeit der Existenzaussage des Hauptsatzes Gebrauch machen. Die restlichen Aussagen des Hauptsatzes werden sich dann leicht ergeben (Satz 4.5).

§ 3. Existenz der Zerlegung.

Wir denken uns einen Vektor $h \in \mathfrak{H}$ fest gewählt. Wir wollen beweisen, daß er eine Zerlegung

(1) $$h = p + f, \qquad p \in \mathfrak{P},\ f \in \mathfrak{F}$$

besitzt. Hierzu müssen wir einen passenden fastperiodischen Vektor p angeben. Ein fastperiodischer Vektor p ist passend für unsere Zwecke, wenn für eine geeignete Folge $x_\nu \in \mathfrak{G}$

(2) $$x_\nu(h - p) \to 0 \quad \text{(schwach)}$$

gilt. Wir werden später sehen, daß man im wesentlichen fertig ist, sobald man einen fastperiodischen Vektor p_0 gefunden hat, für den man

$$x_\nu h \to p_0 \quad \text{(schwach)}$$

erreichen kann. Wir stehen also vor der Aufgabe, in der schwachen Hülle der Menge $\{x h \mid x \in \mathfrak{G}\}$ einen fastperiodischen Vektor p_0 aufzufinden.

Zur Lösung dieser Aufgabe bedienen wir uns des in § 1 D eingeführten Begriffs des Minimalteils einer schwach-abgeschlossenen Menge in $\mathfrak{H}$ (und damit auch der in § 1 C eingeführten, unter der Gruppe $\mathfrak{G}$ invarianten Norm $|||h|||$).

Satz 3.1. *Der Minimalteil $\mathfrak{M}_0$ einer nichtleeren, schwach-abgeschlossenen invarianten Menge $\mathfrak{M}$ ist nichtleer und invariant und besteht aus lauter fastperiodischen Vektoren.*

Beweis. $\mathfrak{M}_0$ ist nichtleer und totalbeschränkt (Satz 1.10). Wegen der Invarianz der Norm $|||h|||$ (Satz 1.8a) ist die Menge $\mathfrak{M}_0$ invariant unter $\mathfrak{G}$.

Ist p ein beliebiger Vektor aus $\mathfrak{M}_0$, so ist die Menge $\{xp \mid x \in \mathfrak{G}\}$ wegen der Invarianz von $\mathfrak{M}_0$ ganz in $\mathfrak{M}_0$ enthalten und als Teilmenge einer totalbeschränkten Menge wieder totalbeschränkt (Satz 1.1 b). Also ist p ein unter $\mathfrak{G}$ fastperiodischer Vektor.

Satz 3.2. *Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ läßt sich auf mindestens eine Weise in der Form*

$$h = p + f, \quad p \in \mathfrak{P},\ f \in \mathfrak{F}$$

darstellen. Man kann dabei $p \in \mathfrak{K}(h)$ wählen.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}(h)$ die schwache Hülle der Menge $\{xh \mid x \in \mathfrak{G}\}$. Dann gilt:

1. $\mathfrak{S}(h)$ ist nichtleer und invariant. Es ist nur die Invarianz zu beweisen. Sei also $g \in \mathfrak{S}(h)$ beliebig gewählt. Nach Satz 1.7 gibt es eine Folge $x_\nu \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$x_\nu h \to g \quad \text{(schwach)}$$

gilt. Sei nun $a \in \mathfrak{G}$ beliebig. Dann gilt für $y_\nu = a x_\nu \in \mathfrak{G}$

$$y_\nu h \to a g \quad \text{(schwach)}.$$

Ist nämlich $k \in \mathfrak{H}$ beliebig gewählt, so gilt

$$(y_\nu h - a g, k) = (x_\nu h - g, a^* k),$$

wobei a^* die zur Transformation a adjungierte Transformation bedeutet. Voraussetzungsgemäß konvergiert aber die rechte Seite gegen 0. Also gilt

$$(y_\nu h - a g, k) \to 0.$$

Damit ist $a g \in \mathfrak{S}(h)$ gezeigt. $\mathfrak{S}(h)$ ist also invariant.

2. Nach Satz 3.1 gibt es im Minimalteil $\mathfrak{S}_0(h)$ von $\mathfrak{S}(h)$ einen fastperiodischen Vektor p_0. Wegen $p_0 \in \mathfrak{S}(h)$ gibt es eine Folge $t_\nu \in \mathfrak{G}$ derart, daß

$$t_\nu h - p_0 \to 0 \quad \text{(schwach)} \tag{4}$$

gilt. Das ist noch nicht ganz das, was wir wünschen [vgl. (2)]. Wir bringen jetzt noch eine Korrektur an. Wir betrachten die Folge $t_\nu^{-1} p_0$. Da sie innerhalb der totalbeschränkten Menge $\{xp_0 \mid x \in \mathfrak{G}\}$ verläuft, können wir annehmen (Teilfolge!), daß sie stark konvergiert:

$$t_\nu^{-1} p_0 \to p \quad \text{(stark)}.$$

Nach Satz 2.1 ist wieder $p \in \mathfrak{P}$. Der Übergang zu einer Teilfolge zerstört die Beziehung (4) nicht. Nunmehr gilt aber

$$t_\nu p \to p_0 \quad \text{(stark)}. \tag{5}$$

Denn es gilt

$$|t_\nu p - p_0| \leq \Gamma \cdot |t_\mu^{-1}(t_\nu p - p_0)|. \tag{6}$$

Bestimmen wir nun zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ zunächst eine Zahl $N > 0$ derart, daß für $\mu > N$

$$|p - t_\mu^{-1} p_0| < \frac{\varepsilon}{\Gamma}$$

gilt, so gilt für $\nu > N$, wenn wir in (6) $\mu = \nu$ setzen:

$$|t_\nu p - p_0| < \varepsilon.$$

Aus (4) und (5) ergibt sich nun die erwünschte Beziehung

$$t_\nu (h - p) \to 0 \quad \text{(schwach)}$$

und wir haben nur $h - p = f$ zu setzen, um die behauptete Zerlegung zu erhalten.

3. Bei der Konstruktion von p sind wir innerhalb von $\mathfrak{S}(h)$ geblieben. Wie im Anschluß an die Definition 3 in § 1 B bemerkt wurde, ist jede konvexe stark-abgeschlossene Menge auch schwach-abgeschlossen. Daraus folgt sofort $\mathfrak{S}(h) \subseteq \mathfrak{K}(h)$ und damit $p \in \mathfrak{K}(h)$.

§ 4. Eindeutigkeit der Zerlegung.

In diesem Paragraphen wollen wir vor allem die folgende Aussage beweisen: Die Menge $\mathfrak{F}$ aller Fluchtvektoren unter der beschränkten Gruppe $\mathfrak{G}$ ist ein invarianter, abgeschlossener, linearer Teilraum von $\mathfrak{H}$ (Satz 4.3; vgl. § 2).

Um die hier vorliegende, in § 2 B angedeutete Schwierigkeit zu umgehen, betrachten wir neben der beschränkten Gruppe $\mathfrak{G} = \{x, y, \ldots\}$ die adjungierte Gruppe $\mathfrak{G} = \{x^*, y^*, \ldots\}$. Dabei ist, wie bekannt, x^* die der Transformation x eineindeutig durch die Relation

$$(x g, h) = (g, x^* h) \quad \text{(für alle } g, h \in \mathfrak{H})$$

zugeordnete Transformation (vgl. Nagy [16], S. 12). $\mathfrak{G}^*$ hat dieselbe Schranke $\Gamma \geq 1$ wie $\mathfrak{G}$ und man kann alle Betrachtungen, die wir in den vorangehenden Paragraphen über die Gruppe $\mathfrak{G}$ angestellt haben, auf die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ übertragen. Die zur Gruppe $\mathfrak{G}^*$ adjungierte Gruppe ist die Gruppe $\mathfrak{G}$.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}^*$ die Menge aller unter $\mathfrak{G}^*$ fastperiodischen Vektoren aus $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{P}^*$ ist ein abgeschlossener, linearer, unter der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$.

Ebenso bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}^*$ die Menge aller Fluchtvektoren unter der Gruppe $\mathfrak{G}^*$.

Satz 4.1. *Für jedes $f \in \mathfrak{F}$ und jedes $g \in \mathfrak{P}^*$ gilt $(f, g) = 0$.*

Beweis. Sei $f \in \mathfrak{F}$ beliebig gewählt. Wir betrachten auf der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ die Funktion

$$\varphi(x^*) = (f, x^* g),$$

wobei g ein beliebiger Vektor aus $\mathfrak{P}^*$ sein möge. Da g unter $\mathfrak{G}^*$ fastperiodisch ist, ist $\varphi(x^*)$ eine fastperiodische Funktion auf der Gruppe $\mathfrak{G}^*$ (vgl. § 2, Anmerkung nach Definition 6). Die Funktion $|\varphi(x^*)|$ ist also ebenfalls

fastperiodisch auf $\mathfrak{G}^*$. Sei α ihr Mittelwert. Es gibt also zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Elemente $a_1^*, \ldots, a_n^* \in \mathfrak{G}^*$ derart, daß für beliebige $x^* \in \mathfrak{G}^*$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |\varphi(x^* a_\nu^*)| - \alpha \right| < \varepsilon$$

gilt; es ist also

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |(f, x^* a_\nu^* g)| - \alpha \right| < \varepsilon,$$

d.h. es gilt

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |(x f, a_\nu^* g)| - \alpha \right| < \varepsilon \tag{1}$$

für alle $x \in \mathfrak{G}$. Nun ist f Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$. Läßt man also x eine passende Folge $x_i \in \mathfrak{G}$ durchlaufen, so gilt

$$|(x_i f, a_\nu^* g)| \to 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $|\alpha| \leq \varepsilon$, und, weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, $\alpha = 0$. Nach einem bekannten Satz über fastperiodische Funktionen (MAAK [13], S. 42) ist dann

$$\varphi(x^*) = 0 \quad \text{für alle} \quad x^* \in \mathfrak{G}^*.$$

Für $x^* = 1^* \in \mathfrak{G}^*$ ergibt sich die Behauptung.

Satz 4.2. *a) Zu jedem von $0 \in \mathfrak{H}$ verschiedenen Vektor $p \in \mathfrak{P}$ gibt es einen Vektor $p^* \in \mathfrak{P}^*$ derart, daß $(p, p^*) \neq 0$ ist.*

b) Zu jedem von $0 \in \mathfrak{H}$ verschiedenen Vektor $f \in \mathfrak{F}$ gibt es einen Vektor $f^* \in \mathfrak{F}^*$ derart, daß $(f, f^*) \neq 0$ ist.

Beweis. a) Sei $p \in \mathfrak{P}$ beliebig gewählt. Wenden wir Satz 3.2 auf die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ an, so erhalten wir für jeden Vektor $h \in \mathfrak{H}$ eine Zerlegung

$$h = p^* + f^*, \qquad p^* \in \mathfrak{P}^*, \qquad f^* \in \mathfrak{F}^*.$$

Wenden wir Satz 4.1 auf die Gruppe $\mathfrak{G}^*$ an, so folgt $(p, f^*) = 0$, also gilt stets $(p, h) = (p, p^*)$. Angenommen, p ist zu jedem Vektor aus $\mathfrak{P}^*$ orthogonal, so ist $(p, h) = 0$. Dies gilt für jedes $h \in \mathfrak{H}$, also ist $p = 0$.

b) Der Beweis für die andere Hälfte des Satzes erfolgt analog.

Satz 4.3. *Die Menge $\mathfrak{F}$ aller Fluchtvektoren bezüglich der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist ein invarianter, abgeschlossener, linearer Teilraum von $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{F}$ besteht genau aus allen Vektoren $h \in \mathfrak{H}$, die $(h, g) = 0$ für jedes $g \in \mathfrak{P}^*$ erfüllen.*

Beweis. Sei $\overline{\mathfrak{F}}$ die Menge aller Vektoren $h \in \mathfrak{H}$, die $(h, g) = 0$ für jedes $g \in \mathfrak{P}^*$ erfüllen. Dann ist $\overline{\mathfrak{F}}$ ein linearer Teilraum von $\mathfrak{H}$. Er ist als Durchschnitt von Hyperräumen schwach-abgeschlossen, also erst recht stark-abgeschlossen. Ferner ist $\overline{\mathfrak{F}}$ unter $\mathfrak{G}$ invariant. Denn wenn $h \in \overline{\mathfrak{F}}$ und $a \in \mathfrak{G}$ ist, dann gilt für jedes $g \in \mathfrak{P}^*$

$$(a h, g) = (h, a^* g) = 0,$$

letzteres, weil $\mathfrak{P}^*$ unter $\mathfrak{G}^*$ invariant ist. Also ist $\overline{\mathfrak{F}}$ unter $\mathfrak{G}$ invariant. Nach Satz 4.1 ist nun $\mathfrak{F} \subseteq \overline{\mathfrak{F}}$. Es gilt aber sogar das Gleichheitszeichen. Sei $h \in \overline{\mathfrak{F}}$ beliebig gewählt. Nach Satz 3.2 läßt sich h in der Form

$$h = p + f, \qquad p \in \mathfrak{P},\ f \in \mathfrak{F}$$

darstellen, wobei $p \in \mathfrak{R}(h)$ gewählt werden kann. Da $\overline{\mathfrak{F}}$ invariant und abgeschlossen ist, ist $\mathfrak{R}(h) \subseteq \overline{\mathfrak{F}}$, also $p \in \overline{\mathfrak{F}}$. Somit gilt $(p, g) = 0$ für jedes $g \in \mathfrak{P}^*$. Daraus folgt aber nach Satz 4.2, daß $p = 0$ und somit $h = f \in \mathfrak{F}$ ist.

Ganz analog beweist man den

Satz 4.4. *Der Raum $\mathfrak{P}$ besteht genau aus allen Vektoren $h \in \mathfrak{H}$, für die $(h, g) = 0$ für jedes $g \in \mathfrak{F}^*$ gilt.*

Mit dem Satz 4.3 ist die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage des Hauptsatzes bewiesen: Jeder Vektor $h \in \mathfrak{H}$ läßt sich auf genau eine Weise in der Form

$$h = p + f, \qquad p \in \mathfrak{P},\ f \in \mathfrak{F} \tag{3}$$

darstellen. Insbesondere ist stets $p \in \mathfrak{R}(h)$.

Satz 4.5. *Die Komponenten p, f der Zerlegung (3) von h hängen linear, stetig und invariant von h ab.*

Beweis. Aus der Linearität der Räume $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$, sowie der Eindeutigkeit der Zerlegung (3) folgt ohne weiteres deren Linearität. Ebenso folgt aus der Invarianz der Räume $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{F}$ die Invarianz der Darstellung (3):

$$xh = xp + xf, \qquad xp \in \mathfrak{P},\ xf \in \mathfrak{F}$$

für jedes $x \in \mathfrak{G}$. Wegen der Linearität braucht die Stetigkeit nur noch an der Stelle $0 \in \mathfrak{H}$ nachgewiesen zu werden. Wegen $p \in \mathfrak{R}(h)$ gilt stets

$$|p| \leq \Gamma |h|.$$

Also hängt p stetig von h ab. Daraus folgt aber, daß auch $f = h - p$ stetig von h abhängt.

Anmerkung. Wegen der völligen Symmetrie im Auftreten von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ bleiben sämtliche Ergebnisse bestehen, wenn man $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ vertauscht. Insgesamt haben wir also die Aussagen:

$\mathfrak{F}$ ist der zu $\mathfrak{P}^*$ orthogonale Raum. $\overline{\mathfrak{F}}^*$ ist der zu $\mathfrak{P}$ orthogonale Raum.

$\mathfrak{P}$ ist der zu $\mathfrak{F}^*$ orthogonale Raum. $\mathfrak{P}^*$ ist der zu $\overline{\mathfrak{F}}$ orthogonale Raum.

§ 5. Eine Kennzeichnung der fastperiodischen Vektoren.

Satz 5.1. *Ein Vektor $h \in \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann fastperiodisch unter der Gruppe $\mathfrak{G}$, wenn für jedes $g \in \mathfrak{H}$ die Funktion*

$$\varphi(x) = (xh, g)$$

fastperiodisch auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist (im Sinne von Maak [13], S. 142).

Beweis. Daß die Bedingung notwendig ist, ist klar. Sei nun h ein Vektor aus $\mathfrak{H}$, für den für jedes $g \in \mathfrak{H}$ die Funktion $\varphi(x) = (x\,h,\, g)$ fastperiodisch auf $\mathfrak{G}$ ist. Jedenfalls existiert eine Zerlegung

$$h = p + f, \qquad p \in \mathfrak{P},\ f \in \mathfrak{F}.$$

Wählen wir $g \in \mathfrak{F}^*$, so gilt nach Satz 4.1

$$\varphi(x) = (x\,f, g).$$

Mit $\varphi(x)$ ist auch $|\varphi(x)|$ eine fastperiodische Funktion auf $\mathfrak{G}$. Nun können wir genau so wie im Beweise des Satzes 4.1 schließen, daß der Mittelwert von $|\varphi(x)|$ verschwindet, was das identische Verschwinden von $\varphi(x)$ zur Folge hat. Für $x = 1 \in \mathfrak{G}$ erhält man $(f, g) = 0$. Dies gilt für jedes beliebige $g \in \mathfrak{F}^*$. Nach Satz 4.2 muß dann aber $f = 0$ sein. Es ist somit der Vektor $h = p$ fastperiodisch unter $\mathfrak{G}$.

Anhang I. Eine Kennzeichnung der Fluchtvektoren im Hilbertraum.

Zunächst beweisen wir eine Aussage über schwach-konvergente Folgen im Hilbertraum.

Satz 1. *Wenn $h_i \to 0$ (schwach) gilt, so gibt es eine Teilfolge h_{i_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots)$ der Folge h_i und ferner eine Folge $k_\nu \in \mathfrak{H}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, derart, daß*

$$(k_\mu, k_\nu) = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu$$
$$|h_{i_\nu} - k_\nu| \to 0 \quad \text{für} \quad \nu \to \infty$$

gilt.

Beweis. Wir konstruieren h_{i_ν} und k_ν durch vollständige Induktion. Zunächst sei $i_1 = 1$, $k_1 = h_1$. Angenommen, die Elemente h_{i_ν}, k_ν sind für $\nu < n$ $(n > 1)$ schon bestimmt, derart, daß

$$(k_\mu, k_\nu) = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu, \quad 1 \leq \mu,\ \nu < n$$
$$|h_{i_\nu} - k_\nu| < \frac{1}{\nu}$$

und $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1}$ gilt. Dann sei $\mathfrak{H}_{n-1}$ der von $k_1, \ldots, k_{n-1}$ aufgespannte Teilraum endlicher Dimension von $\mathfrak{H}$ und $P h_i$ die Projektion von h_i auf $\mathfrak{H}_{n-1}$. Bekanntlich gilt nun $|P h_i| \to 0$. Wir können also $i_n > i_{n-1}$ so bestimmen, daß

$$|P h_{i_n}| < \frac{1}{n}$$

gilt. Wir setzen $k_n = h_{i_n} - P h_{i_n}$. Dann gilt

$$|h_{i_n} - k_n| < \frac{1}{n},$$
$$(k_\mu, k_\nu) = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu,\ 1 \leq \mu,\ \nu \leq n.$$

Die so entstehenden Folgen h_{i_ν}, k_ν haben die gesuchten Eigenschaften.

Satz 2. *Sind $k_1, \ldots, k_n$ Elemente von $\mathfrak{H}$, für welche*

$$(k_\mu, k_\nu) = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu,\ 1 \leq \mu,\ \nu \leq n$$

und — mit passendem $A>0$ —

$$|k_\nu|<A \qquad (\nu=1,\dots,n)$$

gilt, so gilt für jedes $g\in\mathfrak{H}$ *die „Besselsche Ungleichung"*

$$\sum_{\nu=1}^{n}|(g,k_\nu)|^2\leqq A^2|g|^2$$

(vgl. Nagy [16], S. 4).

Nunmehr erhalten wir den

Satz 3. *Ein Vektor* $h\in\mathfrak{H}$ *ist dann und nur dann Fluchtvektor unter der Gruppe* $\mathfrak{G}=\{x,y,\dots\}$, *wenn für jedes* $g\in\mathfrak{H}$ *die Funktion*

$$\varphi(x)=|(xh,g)|^2$$

auf $\mathfrak{G}$ *linksergodisch* (vgl. Maak [15], S. 36) *mit dem Mittelwert* 0 *ist.*

Beweis. I. Sei $h\in\mathfrak{H}$ Fluchtvektor unter der Gruppe $\mathfrak{G}$. Wir bestimmen eine Folge $x_\nu\in\mathfrak{G}$ derart, daß $x_\nu h\to 0$ (schwach) gilt. Nach Satz 1 können wir gleich annehmen (Teilfolge!), daß es eine Folge $k_\nu\in\mathfrak{H}$ gibt, derart, daß

$$|x_\nu h-k_\nu|\to 0 \tag{1}$$

und

$$(k_\mu,k_\nu)=0 \quad \text{für} \quad \mu\neq\nu$$

gilt. Wegen der Beschränktheit der schwach-konvergenten Folge $x_\nu h$ gibt es ein $A>0$ derart, daß $|k_\nu|<A$ für $\nu=1,2,\dots$ gilt. Sei nun $\varepsilon>0$ beliebig gegeben. Wir wählen $n>\frac{2A^2|g|^2\Gamma^2}{\varepsilon}$. Ferner bestimmen wir $N>0$ derart, daß für $\nu>N$ und beliebiges $x^*\in\mathfrak{G}^*$

$$\big||(x_\nu h,x^*g)|^2-|(k_\nu,x^*g)|^2\big|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

gilt. Wegen $|x^*g|\leqq\Gamma|g|$ und (1) ist das stets möglich. Nun haben wir für jedes $x\in\mathfrak{G}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{\nu=N+1}^{N+n}\varphi(xx_\nu)&=\frac{1}{n}\sum|(x_\nu h,x^*g)|^2\\&<\frac{1}{n}\sum|(k_\nu,x^*g)|^2+\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{(nach (2))}\\&\leqq\frac{1}{n}A^2|x^*g|^2+\frac{\varepsilon}{2}\quad\text{(nach Satz 2)}\\&\leqq\frac{1}{n}A^2|g|^2\Gamma^2+\frac{\varepsilon}{2}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Dies ist aber der Ausdruck für die Tatsache, daß $\varphi(x)$ linksergodisch mit dem Mittelwert 0 ist (vgl. Maak [15], S. 36). Es ist übrigens nicht schwer, mit Hilfe der adjungierten Gruppe $\mathfrak{G}^*$ zu beweisen, daß $\varphi(x)$ auch rechtsergodisch mit dem Mittelwert 0 ist.

II. Sei h ein Vektor aus $\mathfrak{H}$ derart, daß für jedes $g \in \mathfrak{H}$ die Funktion

$$\varphi(x) = |(xh, g)|^2$$

auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ linksergodisch mit dem Mittelwert 0 ist. Wählen wir insbesondere $g \in \mathfrak{P}^*$, so ist die Funktion

$$\psi(x^*) = |(h, x^* g)|^2$$

fastperiodisch auf $\mathfrak{G}^*$. Aus $\psi(x^*) = \varphi(x)$ schließt man sofort auf die Fastperiodizität von $\varphi(x)$ auf $\mathfrak{G}$. Nach einem bekannten Satze über fastperiodische Funktionen folgt aus dem Verschwinden ihres Mittelwertes ihr identisches Verschwinden. Also ist insbesondere

$$|(h, g)|^2 = \varphi(1) = 0,$$

d.h. $(h, g) = 0$ für jedes $g \in \mathfrak{P}^*$. Nach § 4, Satz 3 ist also h Fluchtvektor unter $\mathfrak{G}$.

Anmerkung. Mit Satz 3 ist der Anschluß unserer Ergebnisse an die Arbeiten von GODEMENT [9] und MAAK [15] hergestellt.

Anhang II. Verallgemeinerung auf gleichmäßig-konvexe Räume.

Die Ergebnisse der §§ 1 bis 5 lassen sich wie folgt verallgemeinern:

Sei $\mathfrak{H} = \{f, g, h, \ldots\}$ ein (komplexer) Banachraum. Unter dem zum Raum $\mathfrak{H}$ dualen Raum $\mathfrak{H}^*$ versteht man bekanntlich den (komplexen) linearen Raum aller stetigen Linearformen $f^*, g^*, h^*, \ldots$ auf $\mathfrak{H}$. Die durch Anwendung der Linearform $h^* \in \mathfrak{H}^*$ auf den Vektor $h \in \mathfrak{H}$ entstehende Zahl bezeichnen wir mit (h, h^*). Man führt in $\mathfrak{H}^*$ durch die Festsetzung

$$|h^*| = \sup_{|h| \leq 1} |(h, h^*)| \tag{1}$$

eine Norm ein. Dadurch wird $\mathfrak{H}^*$ zu einem Banachraum gemacht. (h, h^*) ist nun eine in beiden Variablen simultan stetige Bilineartorm, bei der die erste Variable in $\mathfrak{H}$, die zweite in $\mathfrak{H}^*$ läuft.

Es gilt bekanntlich (nach dem Satz von Hahn-Banach; vgl. BOURBAKI [5], S. 110) für jedes $h \in \mathfrak{H}$

$$|h| = \sup_{h^* \leq 1} |(h, h^*)|. \tag{2}$$

Anmerkung. Ist $\mathfrak{H}$ ein Hilbertraum, so sind alle genannten Voraussetzungen erfüllt. Bekanntlich kann man $\mathfrak{H}$ dann mit seinem dualen Raum $\mathfrak{H}^*$ identifizieren (NAGY [16], S. 9).

Setzen wir nun voraus, daß der Banachraum $\mathfrak{H}$ gleichmäßig-konvex sei (vgl. CLARKSON [6]), so gelten sämtliche Ergebnisse der §§ 1 bis 3 auch für diesen Fall. Einige Schwierigkeiten bereitet lediglich der Satz 1.6. Um ihn auch für gleichmäßig-konvexe Räume zu beweisen, kann man folgendermaßen vorgehen:

1. Man kann Satz 1.4 allgemein für eine beschränkte Filterbasis $K = \{\mathfrak{K}\}$ (BOURBAKI [4], S. 8) von nichtleeren, abgeschlossenen, konvexen Mengen $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{H}$ beweisen: Zu $\mathfrak{K}_1 \in K$, $\mathfrak{K}_2 \in K$ gebe es stets ein $\mathfrak{K}_3 \in K$ mit $\mathfrak{K}_3 \subseteq \mathfrak{K}_1 \cap \mathfrak{K}_2$. Dann

ist $\bigcap_{\Re \supset K} \Re$ nichtleer. Entsprechend verallgemeinert man nun Satz 1.5 auf Cauchy-Filterbasen (BOURBAKI [4], S. 10) bezüglich der schwachen Topologie in $\mathfrak{H}$. Das ist ganz leicht. Man erhält: Jede Cauchyfilterbasis bezüglich der schwachen Topologie ist schwach-konvergent (d.h. $\mathfrak{H}$ ist schwach-vollständig) und der Limes liegt in der stark-abgeschlossenen konvexen Hülle einer jeden Menge der Filterbasis.

Daraus folgt: Jede beschränkte Filterbasis in einem abgeschlossenen Teilraum $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}$ gestattet eine schwach-konvergente Verfeinerung, deren Limes notwendig in $\mathfrak{H}_0$ liegen muß.

2. Unter Benutzung eines Gedankenganges von KREIN-ŠMULIAN ([12], S. 571) gehen wir nun weiter vor: In $\mathfrak{H}$ sei eine beschränkte Folge h_i gegeben. Sie spannt einen abgeschlossenen separablen Teilraum $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}$ auf. Sei f_ν eine in $\mathfrak{H}_0$ stark-dichte Punktfolge. Wegen (2) gibt es zu jedem f_ν ein $g_\nu^* \in \mathfrak{H}^*$, derart, daß

$$|g_\nu^*| \leq 1, \qquad |(f_\nu, g_\nu^*)| \geq \tfrac{1}{2}|f_\nu|$$

gilt. Es gilt nun: Ist $f \in \mathfrak{H}_0$ derart, daß $(f, g_\nu^*) = 0$ für jedes $\nu = 1, 2, \ldots$ ist, so ist $f = 0$.

3. Sei nun k_j eine Teilfolge der Folge h_i und für jedes $\nu = 1, 2, \ldots$ sei der Limes

$$\lim_{j \to \infty} (k_j, g_\nu^*) = \varkappa_\nu$$

vorhanden. Zunächst kann man das der Folge k_j entsprechende Frèchetfilter F (BOURBAKI [4], S. 8) zu einem schwach-konvergenten Filter $\overline{F}$ verfeinern (BOURBAKI [4], S. 9), dessen Limes k nach Nr. 1 in $\mathfrak{H}_0$ liegen muß. Man folgert sofort, daß $(k, g_\nu^*) = \varkappa_\nu$ gilt, und nach Nr. 2 ist k durch diese Gleichungen schon eindeutig festgelegt.

Würde nun die Folge k_j nicht schwach gegen k konvergieren, so könnte man zum Filter F noch eine andere schwach-konvergente Verfeinerung finden, deren Limes von k verschieden ist. Das steht zu der Eindeutigkeit von k im Widerspruch. Also gilt $k_j \to k$ (schwach). Damit ist Satz 1.6 auf unseren allgemeinen Fall übertragen. Die übrigen Ergebnisse der §§ 1 bis 3 übertragen sich ohne Schwierigkeit.

Im § 4 kommt die duale Gruppe $\mathfrak{G}^*$ mit ins Spiel: Man kann jeder beschränkten linearen Transformation x in $\mathfrak{H}$ genau eine lineare Transformation x^* in $\mathfrak{H}^*$ (mit derselben Schranke) zuordnen, derart, daß für alle $f \in \mathfrak{H}$, $f^* \in \mathfrak{H}^*$

$$(xf, f^*) = (f, x^* f^*)$$

gilt. Durchläuft x die beschränkte Gruppe $\mathfrak{G}$, so durchläuft x^* die duale Gruppe $\mathfrak{G}^*$.

Da wir in § 4 die für $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ gewonnenen Ergebnisse auch für $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{H}^*$ benötigen, so müssen wir voraussetzen, daß auch der Raum $\mathfrak{H}^*$ gleichmäßig-konvex metrisiert werden kann. Dann lassen sich auch sämtliche Ergebnisse der §§ 4 und 5 übertragen.

Sämtliche Ergebnisse der §§ 1 bis 5 sind also auf den Fall beschränkter Gruppen in dualen Paaren gleichmäßig-konvexer Räume übertragbar. Dieser Fall liegt z.B. für die Raumpaare L^p, $L^{p'}$ $\left(p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ vor (vgl. Nagy [16], S. 9).

Hier taucht die Frage auf: Unter welchen Voraussetzungen kann man den dualen Raum $\mathfrak{H}^*$ eines gleichmäßig-konvex metrisierbaren Raumes $\mathfrak{H}$ ebenfalls gleichmäßig-konvex metrisieren? In gewissem Maße gibt hierüber ein Satz von Nakano ([17], S. 124) Auskunft: Die durch die Vorschrift (1) in $\mathfrak{H}^*$ eingeführte Norm ist dann und nur dann gleichmäßig-konvex, wenn die Norm in $\mathfrak{H}$ „gleichmäßig-flach" ist, d.h. wenn es zu jedem $\gamma > 0$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, derart, daß für $\varepsilon \leq |f| \leq \gamma$, $\varepsilon \leq g \leq \gamma$, $|f - g| \leq \delta$ stets

$$\left|\frac{f+g}{2}\right| \leqq \frac{|f| + |g|}{2} - \varepsilon \cdot |f - g|$$

gilt.

Literatur.

[1] Alaoglu-Birkhoff: General ergodic theorems. Ann. of Math. **41**, 293—309 (1940). — [2] Alexandroff-Hopf: Topologie I. Berlin 1935. — [3] Birkhoff, G.: An ergodic theorem for general semigroups. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **25**, 625—627 (1939). — [4] Bourbaki, N.: Topologie générale (fascicule des résultats). Paris 1953. — [5] Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques. Paris 1953. — [6] Clarkson: Uniformly convex spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **40**, 393—414 (1936). — [7] Day, M. M.: Means for bounded functions and ergodicity of the bounded representations of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 276—291 (1950). — [8] Eberlein, W. F.: Abstract ergodic theorems and weakly almost periodic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **67**, 217—240 (1949). — [9] Godement, R.: Les fonctions de type positif. Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 1—84 (1948). — [10] Hopf, E.: Ergodentheorie. Berlin 1937. — [11] Jacobs, K.: Ein Ergodensatz für beschränkte Gruppen im Hilbertschen Raum. Math. Ann. **128**, 340—349 (1954). — [12] Krein-Šmulian: On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space. Ann. of Math. **41**, 556—583 (1940). — [13] Maak, W.: Fastperiodische Funktionen. Berlin 1950. — [14] Maak, W.: Fastperiodische invariante Vektormoduln in einem metrischen Vektorraum. Math. Ann. **122**, 157—166 (1950). — [15] Maak, W.: Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen. J. reine u. angew. Math. **190**, 34—48 (1952). — [16] Szeged-Nagy, B. v.: Spektraldarstellungen linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes. Berlin 1942. — [17] Nakano: Modulared linear spaces. J. Fac. Sci. Tokyo **6**, 85—131 (1951). — [18] Pettis: A proof that every uniformly convex space is reflexive. Duke Math. J. **5**, 249—253 (1939).

München, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 10. Oktober 1954.)

KNESER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 429—434 (1955)

Ein Satz über abelsche Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen.

Von
MARTIN KNESER.

Einleitung. G sei eine additive abelsche Gruppe, in der jeder Teilmenge A eine reelle Maßzahl $m(A)$ zugeordnet ist. Für verschiedene G und m sind in letzter Zeit Sätze folgender Art aufgestellt worden: A und B seien zwei nicht leere Teilmengen von G und $A+B$ ihre Summe (die aus allen Elementen $a+b$ mit $a \in A$ und $b \in B$ besteht); dann gilt mit einem näher bestimmbaren Restglied $r(A, B)$ die Ungleichung

$$m(A+B) \geqq \min\big(m(G), m(A)+m(B)-r(A,B)\big). \tag{1}$$

Am bekanntesten ist in dieser Richtung die „$(\alpha+\beta)$-Hypothese" (siehe z.B. [1] im Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit), wo G die ganzen rationalen Zahlen und m die SCHNIRELMANNsche Dichte bedeuten und $r(A, B)=0$ behauptet wird. Für die asymptotische Dichte gilt eine entsprechende Aussage [4], nur ist hier nicht immer $r(A, B)=0$; nämlich dann nicht, wenn es eine Untergruppe H von G gibt derart, daß alle genügend großen Zahlen aus $A+B+H$ schon in $A+B$ liegen; und zwar ist $r(A, B)=m(H)$ wenn H maximal gewählt ist. Weitere Beispiele finden sich in [6], [7] und [8], wo G eine beliebige endliche abelsche Gruppe und $m(A)$ die Anzahl der Elemente von A ist.

Im folgenden werden zwei weitere Ergebnisse dieser Art angegeben. Das erste (§ 1) bezieht sich auf den zuletzt genannten Fall, daß $m(A)$ die Anzahl der Elemente von A ist, und besagt in Analogie zu [4], daß $r(A, B)=m(H)$ ist, wo H die größte Untergruppe von G mit der Eigenschaft $A+B+H=A+B$ ist (das bedeutet, daß $A+B$ aus vollen Restklassen modulo H besteht). Ähnliche aber schwächere Aussagen finden sich schon bei MANN [6], [7]. Das zweite (§ 2) behandelt die n-dimensionale Torusgruppe und den inneren JORDANschen Inhalt; hier ist wieder $r(A, B)=0$[1]).

Die Ähnlichkeit der angeführten Aussagen beschränkt sich nicht auf die äußere Form, sondern ist auch in den Beweisen zu finden: Alle diese Sätze werden mit Hilfe der e-Transformationen (s. [1]) bewiesen; nur im Falle der Torusgruppe kommt noch eine Überlegung hinzu, die den Übergang vom Diskontinuierlichen zum Kontinuierlichen gestattet.

[1]) *Zusatz bei der Korrektur (20. 12. 54):* Inzwischen wurde mir bekannt, daß der Inhalt von § 2, insbesondere der Satz 3 mit einem dem hier gegebenen ganz ähnlichen Beweis in einer Arbeit von A. M. MACBEATH enthalten ist: On measure of sum sets II. The sum-theorem for the torus. Proc. Cambridge Phil. Soc. **49**, 40—43 (1953)

Das Ergebnis aus § 2 erlaubt schließlich Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen (§ 3). Es ergeben sich einfache Beweise, Verschärfungen und Verallgemeinerungen bekannter Ergebnisse über den Zusammenhang zwischen homogenen und inhomogenen diophantischen Approximationen (vgl. [2], [3], [9], [10]).

Ein kurzer Bericht über die Ergebnisse dieser Arbeit ist in den Proceedings des Internationalen Mathematiker-Kongresses 1954 erschienen [5].

§ 1. Ein Satz über abelsche Gruppen.

In diesem Abschnitt sei G eine beliebige (nicht notwendig endliche) abelsche Gruppe, A und B endliche Teilmengen von G mit $n(A)$ bzw. $n(B)$ Elementen. Aus dem Hauptergebnis der Arbeit [4] folgt[2]) für endliche zyklische Gruppen der

Satz 1. *Zu irgend zwei endlichen Teilmengen A und B von G gibt es eine Untergruppe H von G so, daß $A+B+H=A+B$ ist und die Ungleichung*

$$n(A+B) \geqq n(A)+n(B)-n(H)$$

gilt[3]).

Dieser Satz läßt sich auch für beliebige abelsche Gruppen beweisen. Das läuft aber nur auf eine Übertragung (mit einigen Vereinfachungen) der Beweise aus [4] (insbesondere S. 464—470) hinaus und soll daher hier nicht durchgeführt werden. Dagegen läßt sich die folgende schwächere Aussage leichter beweisen, und da sie die Grundlage für alles Weitere bildet, führe ich das kurz aus. Übrigens kann man einen Beweis auch der Note [7] entnehmen.

Satz 2. *Für irgend zwei nicht leere endliche Teilmengen A und B von G gilt*

$$(2) \qquad A+B=G \qquad \text{falls} \quad n(A)+n(B)>n(G),$$

$$(3) \qquad n(A+B)\geqq n(A)+n(B)-n(H) \quad \text{falls} \quad n(A)+n(B)\leqq n(G);$$

dabei ist H eine echte endliche Untergruppe von G.

Beweis. Ist $n(A)+n(B)>n(G)$ und c ein beliebiges Element aus G, so haben die beiden Mengen A und $c-B$ zusammen mehr Elemente als G; also gibt es ein gemeinsames Element $a=c-b$, und das bedeutet $c=a+b\in A+B$, also, da c beliebig war, $A+B=G$. Ist aber $n(A)+n(B)\leqq n(G)$, so wenden wir Induktion nach $n(B)$ an. Besteht B nur aus einem Element, so setzen wir $H=\{0\}$. Anderenfalls unterscheiden wir zwei Möglichkeiten:

1. Für alle Elementepaare (b_1, b_2) aus B liegt $A+b_2-b_1$ in A. Dann gilt auch $A+K\subseteq A$, wo K die von den Differenzen b_2-b_1 erzeugte Untergruppe ist. Ist $K=G$, so folgt $A=G$, also auch $A+B=G$; wegen der Voraussetzung von (3) gilt dann $n(A+B)\geqq n(A)+n(B)$, also erst recht die Ungleichung (3) mit $H=\{0\}$. Ist aber $K\neq G$, so zeigt bei festem $a\in A$ die Abbildung von $k\in K$ auf $a+k\in A$, daß K endlich ist, und bei festem $b_1\in B$ die Abbildung von $b\in B$ auf $b-b_1\in K$, daß $n(B)\leqq n(K)$ ist. Daraus folgt $n(A+B)\geqq n(A)\geqq n(A)+n(B)-n(K)$; das ist die Ungleichung (3) mit $H=K$.

[2]) Vgl. den Schluß der Einleitung von [4].

[3]) Der Fall $n(A)+n(B)>n(G)$ ist hierin mit $H=G$ enthalten.

2. Es gibt Elemente $a \in A$ und $b_1, b_2 \in B$ so, daß $a + b_2 - b_1$ nicht in A liegt. Dann ersetzen wir zunächst A und B durch die Mengen $A - a$ und $B - b_1$ die beide das Nullelement enthalten. Wegen $n(A-a) = n(A)$, $n(B-b_1) = n(B)$ und $n\big((A-a)+(B-b_1)\big) = n\big((A+B)-(a+b_1)\big) = n(A+B)$ ändert das nichts an der Behauptung; außerdem ist $b_2 - b_1$ zwar in $B - b_1$ aber nicht in $A - a$ enthalten. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, daß die Null in A und B liegt und daß B nicht ganz in A enthalten ist. Nun bilden wir die Mengen $A' = A \cup B$ und $B' = A \cap B$. Dann gilt ersichtlich $n(A') + n(B') = n(A) + n(B) \leqq n(G)$ und $A' + B' \subseteq A + B$; außerdem ist $n(B') < n(B)$ und A' und B' enthalten beide die Null, sind also nicht leer. Die Induktionsannahme liefert dann $n(A' + B') \geqq n(A') + n(B') - n(H)$, also nach dem eben Gesagten $n(A + B) \geqq n(A) + n(B) - n(H)$ wie behauptet.

§ 2. Die n-dimensionale Torusgruppe.

Für das Folgende seien

R^n der n-dimensionale reelle Vektorraum,
$i(A)$ der innere JORDANsche Inhalt einer Menge $A \subset R^n$,
I ein von n linear unabhängigen Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ aufgespanntes Gitter mit der Determinante $d = d(I)$,
$T = R^n/I$ die n-dimensionale Torusgruppe,
φ die kanonische Abbildung von R^n auf T.

Den inneren JORDANschen Inhalt $i(A)$ einer Menge A aus T erklären wir so: Ist W ein Fundamentalparallelotop des Gitters I, so sei $i(A) = i\big(W \cap \varphi^{-1}(A)\big)$, insbesondere also $i(T) = i(W) = d(I)$[4]. Aus dem Satz 2 folgt dann durch einen Grenzübergang der

Satz 3[1]). *Sind A und B zwei nicht leere Teilmengen von T, so gilt*

(4) $\qquad A + B = T \qquad$ *falls* $\quad i(A) + i(B) > i(T)$[5]),

(5) $\qquad i(A + B) \geqq i(A) + i(B) \quad$ *falls* $\quad i(A) + i(B) \leqq i(T)$[6]).

Beweis. Im Falle (4) gilt für ein beliebiges Element $c \in T$ die Ungleichung $i(A) + i(c - B) = i(A) + i(B) > i(T)$; A und $c - B$ müssen also einen Punkt $a = c - b$ gemeinsam haben, und das bedeutet $c = a + b \in A + B$, also $A + B = T$. Ist im Falle (5) $i(A) = 0$, so sind wir wegen $i(A + B) \geqq i(B) = i(A) + i(B)$ fertig. Wir können also $i(A)$ und $i(B)$ ungleich 0 voraussetzen. Dann sei p eine natürliche Zahl, $I_p = p^{-1} I$ das Gitter, das von den Vektoren $p^{-1} e_1, \ldots, p^{-1} e_n$ aufgespannt wird und T_p die Faktorgruppe I_p/I mit der Ordnung p^n. Jedem

[4]) Eleganter aber weniger elementar wäre es natürlich, die Theorie des HAARschen Maßes heranzuziehen.

[5]) Hier wie in den folgenden Sätzen kann man das $>$ in der Voraussetzung durch $\geqq$ ersetzen, falls die auftretenden Mengen kompakt (d.h. in T abgeschlossen, in R^n abgeschlossen und beschränkt) sind.

[6]) Dieser Satz gilt wörtlich genau so, wenn man statt des JORDANschen Inhalts $i(A)$ das innere LEBESGUEsche Maß $l(A)$ zugrunde legt. Die Aussage (5) kann man sogar zu $i(A + B) \geqq l(A) + l(B)$ verschärfen, wenn $l(A)$ und $l(B)$ beide positiv sind. Für die folgenden Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen ist das aber unwesentlich.

Vektor $x=\sum_i x_i e_i$ aus I_p ordnen wir den Würfel $W_p(x)$ der Vektoren $y=\sum_i y_i e_i$ mit $x_i \leqq y_i < x_i + p^{-1}$ und jedem Element $a=\varphi(x)$ aus T_p die Menge $W_p(a)=\varphi\left(W_p(x)\right)$ zu. Jetzt sei A_p die Menge der $a \in T_p$ für die $W_p(a)$ in A liegt. Dann gilt $n(A_p)\, p^{-n} i(T) \leqq i(A)$ und der Grenzwert der linken Seite für $p \to \infty$ ist gleich $i(A)$; entsprechendes gilt für die analog gebildeten Mengen B_p und $(A+B)_p$. Insbesondere folgt $n(A_p)>0$ und $n(B_p)>0$ für genügend großes p sowie $n(A_p)+n(B_p) \leqq n(T_p)$, so daß die Formel (3) aus Satz 2 anwendbar ist. Wir erhalten $n(A_p+B_p) \geqq n(A_p)+n(B_p)-n(H_p)$ mit einer echten Untergruppe H_p von T_p. Wir setzen jetzt voraus, daß p eine Primzahl ist, was $n(H_p) \leqq p^{n-1}$ zur Folge hat. Beachten wir, daß $(A+B)_p$ die Summe A_p+B_p umfaßt, so ergibt sich, da es beliebig große Primzahlen p gibt

$$i(A+B) = \lim_{p\to\infty} n\left((A+B)_p\right) p^{-n} i(T) \geqq \lim_{p\to\infty} \left(n(A_p)+n(B_p)-p^{n-1}\right) p^{-n} i(T)$$
$$= \lim_{p\to\infty} n(A_p)\, p^{-n} i(T) + \lim_{p\to\infty} n(B_p)\, p^{-n} i(T) = i(A)+i(B),$$

wie behauptet.

Dieser Satz läßt sich natürlich sofort durch Induktion auf mehr als zwei Summanden verallgemeinern und gibt so insbesondere den

Satz 4. *Sind $A_1, \ldots, A_r$ nicht leere Teilmengen der Torusgruppe T und ist $\sum_k i(A_k) > i(T)$, so gilt $\sum_k A_k = T$.*

§ 3. Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen.

Wir brauchen jetzt die Ergebnisse des vorigen Abschnitts nur in Aussagen über den Vektorraum R^n zu übersetzen um Sätze aus der Geometrie der Zahlen zu erhalten. Ist A eine Menge des R^n und gibt es in A keine $k+1$ inneren Punkte, die modulo I kongruent sind, so gilt $i(A) \leqq k \cdot i\left(\varphi(A)\right)$. Aus Satz 4, angewandt auf die Mengen $\varphi(A_j) \subseteqq T$ folgt also der

Satz 5. *Enthält für $j=1, \ldots, r$ die Menge $A_j \subset R^n$ nicht mehr als k_j modulo I kongruente Punkte im Inneren und ist $\sum_j k_j^{-1} i(A_j) > d(I)$, so gibt es zu jedem Vektor $x \in R^n$ einen Gittervektor $g \in I$ derart, daß $x-g$ in $\sum_j A_j$ liegt. Die Mengen $\sum_j A_j + g$ $(g \in I)$ überdecken also den ganzen Raum.*

Diese Aussage läßt sich noch verschärfen zu einer Abschätzung der Anzahl der Vektoren g mit der genannten Eigenschaft; z. B. für $r=2$ zu

Satz 6. *Es sei $0 < k \leqq k+h \leqq l$; die Menge $A \subset R^n$ enthalte nicht mehr als k, die Menge $B \subset R^n$ nicht mehr als l innere Punkte, die modulo I kongruent sind. Ist dann $(1-h\,l^{-1})\, k^{-1} i(A) + l^{-1} i(B) > d(I)$, so gibt es zu jedem Vektor $x \in R^n$ mindestens $k+h$ Gittervektoren $g \in I$ derart, daß $x-g$ in $A+B$ liegt.*

Für $h=0$, $k=l$ sind hierin Sätze von HLAWKA ([2] S. 304) und SCHNEIDER [10] enthalten.

Beweis. Es sei $\bar{A}_j$ die Menge der Elemente aus T, die bei der Abbildung φ Bild von mindestens j Punkten aus A sind. Dann gilt $\bar{A}_1 \supseteqq \bar{A}_2 \supseteqq \cdots \supseteqq \bar{A}_k$ und $i(A) = i(\bar{A}_1) + \cdots + i(\bar{A}_k)$. Entsprechend seien die Mengen $\bar{B}_1, \ldots, \bar{B}_l$ erklärt.

Die vorausgesetzte Ungleichung läßt sich umschreiben zu $k^{-1}i(A) + (l-h)^{-1}\left(i(B) - h\,d(I)\right) > d(I)$. Wegen $i(\overline{B}_j) \leqq i(T) = d(I)$ folgt $i(B) = \sum_{j=1}^{l} i(\overline{B}_j) \leqq h\,d(I) + \sum_{j=h+1}^{l} i(\overline{B}_j)$, also $k^{-1}\sum_{j=1}^{k} i(\overline{A}_j) + (l-h)^{-1}\sum_{j=h+1}^{l} i(\overline{B}_j) > d(I)$. Nun bilden die Zahlen $i(\overline{B}_1), i(\overline{B}_2), \ldots$ eine monoton fallende Folge; wegen $l-h \geqq k$ folgt $(l-h)^{-1}\sum_{j=h+1}^{l} i(\overline{B}_j) \leqq k^{-1}\sum_{j=h+1}^{h+k} i(\overline{B}_j)$ und daher $\sum_{j=1}^{k} i(\overline{A}_j) + \sum_{j=h+1}^{h+k} i(\overline{B}_j) > k\,d(I)$. Also muß mindestens eine der k Summen $i(\overline{A}_{k-j+1}) + i(\overline{B}_{h+j})$ $(j = 1, \ldots, k)$ größer als $d(I)$ sein, und es folgt $\overline{A}_{k-j-1} + \overline{B}_{j+h} = T$. Nun sei $x \in R^n$ beliebig und $\overline{a} \in \overline{A}_{k-j+1}$, $\overline{b} \in \overline{B}_{j-h}$ so, daß $\varphi(x) = \overline{a} + \overline{b}$ ist. Weiter sei $\overline{a} = \varphi(a_1) = \cdots = \varphi(a_{k-j-1})$ und $\overline{b} = \varphi(b_1) = \cdots = \varphi(b_{j-h})$. Unter den Summen $a_r + b_s$ gibt es nach Satz 2 mindestens $k+h$ verschiedene; da die Vektoren $x - a_r - b_s$ in I liegen — es ist $\varphi(x - a_r - b_s) = \varphi(x) - \overline{a} - \overline{b} = 0$ — erfüllen sie die Behauptung des Satzes.

Für eine weitere Anwendung führen wir einige Bezeichnungen ein: A sei ein beschränkter abgeschlossener konvexer Körper, tA der im Verhältnis $1:t$ ähnlich vergrößerte Körper und $a(t) = i\left(\varphi(tA)\right)$. Diese Funktion spiegelt wichtige Eigenschaften des Körpers A wieder. So ist $a(t) = t^n i(A)$ für genügend kleine t, und die obere Grenze dieser t ist bei symmetrischem A gleich $m_1/2$, wo m_1 das erste Minimum von A bezüglich I ist. Die Gleichung $a(t) = d(I)$ ist wegen der Abgeschlossenheit von A gleichbedeutend damit, daß es zu jedem Vektor aus R^n einen modulo I kongruenten Vektor in tA gibt, daß also $tA + I = R^n$ ist; die untere Grenze dieser t können wir jetzt leicht nach oben abschätzen. Dazu wenden wir Satz 3 auf $\varphi(sA)$ und $\varphi(tA)$ an; wegen der Konvexität von A ist $sA + tA = (s+t)A$ und daher ergibt sich die Ungleichung $a(s+t) \geqq \min\left(d(I), a(s) + a(t)\right)$ und allgemeiner durch mehrfache Anwendung $a\left(\sum_i t_i\right) \geqq \min\left(d(I), \sum_i a(t_i)\right)$. Bezeichnen wir mit $[q]$ das größte Ganze von q und außerdem mit $\langle q\rangle$ den Rest von q modulo eins, also $q = [q] + \langle q\rangle$, so gilt der

Satz 7. *Enthält tA nicht mehr als k modulo I kongruente Punkte im Innern, so gibt es für $s \geqq \left([q] + \langle q\rangle^{1/n}\right)t$, $q = d(I)\,k\,t^{-n}\,i(A)^{-1}$ zu jedem Vektor $x \in R^n$ einen Gittervektor $g \in I$ derart, daß $x - g$ in sA liegt; die Mengen $sA + g$ $(g \in I)$ überdecken also den ganzen Raum.*

Beweis. Wegen $a(t) = i\left(\varphi(tA)\right) \geqq k^{-1}i(tA) = k^{-1}t^n i(A)$ gilt

$$a(s) \geqq \min\left(d(I), \sum_{i=1}^{[q]} a(t) + a\left(\langle q\rangle^{1/n} t\right)\right) \geqq \min\left(d(I), \left([q] + \langle q\rangle\right) k^{-1} t^n\, i(A)\right) = d(I),$$

und das hat, wie eben festgestellt, die Behauptung des Satzes zur Folge.

Setzt man insbesondere $k = 1$, $t = m_1/2$, so muß für s die Ungleichung $s \geqq ([q] + \langle q\rangle^{1/n}) \cdot m_1/2$ mit $q = 2^n \cdot d(I) \cdot m_1^{-n} i(A)^{-1}$ erfüllt sein. Das stimmt bis auf eine geringe Verbesserung mit einem Ergebnis von Hlawka überein ([3], S. 190). Daß sich dies ohne weitere Kenntnis über A nicht mehr wesentlich verbessern läßt, sieht man an dem folgenden Beispiel, wo schon die Ungleichung $s \geqq q\,m_1/2 = d(I)\,(m_1/2)^{1-n} i(A)^{-1}$ für die Gültigkeit der Behauptung

des Satzes nicht mehr ausreicht[7]). I sei das Gitter der Vektoren in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten x, y, A sei der durch $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$, $|x + y| \leqq 3/2$ definierte Bereich. Es ist $d(I) = 1$, $i(A) = 7/2$, $m_1 = 1$, $q\, m_1/2 = 4/7$; der Körper $\frac{4}{7}A$ enthält aber keinen Vektor $(1/2 - x,\ 1/2 - y)$ mit ganzen x und y. Dagegen läßt sich wie in der Arbeit von HLAWKA die Aussage verschärfen, wenn man noch die höheren Minima heranzieht, doch machen die schärfsten so erhältlichen Aussagen Fallunterscheidungen über die Größenverhältnisse von $m_1, \ldots, m_n$, $d(I)$ und $i(A)$ nötig. Außerdem läßt sich Satz 7 ähnlich wie Satz 5 zu einer Abschätzung der Anzahl der Gittervektoren g verschärfen.

Literatur.

[1] CORPUT, J. G. VAN DER: On sets of integers I, II, III. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50**, 252—261, 340—350, 429—435 (1947). — [2] HLAWKA, E.: Zur Geometrie der Zahlen. Math. Z. **49**, 285—312 (1943). — [3] HLAWKA, E.: Zur Theorie des Figurengitters. Math. Ann. **125**, 183—207 (1952). — [3a] Referat über [3] von J. W. S. CASSELS: Zbl. Math. **47**, 50 (1953). — [4] KNESER, M.: Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen. Math. Z. **58**, 459—484 (1953). — [5] KNESER, M.: Anwendung eines Satzes von Mann auf die Geometrie der Zahlen. Proc. Int. Congr. of Math. 1954 Amsterdam, **2**, 32. — [6] MANN, H. B.: An addition theorem for sets of elements of abelian groups. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 423 (1953). — [7] MANN, H. B.: On products of sets of groups elements. Canad. J. Math. **4**, 64—66 (1952). — [8] SCHERK, P., and J. H. B. KEMPERMAN: Complexes in abelian groups. Canad. J. Math. **6**, 230—237 (1954). — [9] SCHERK, P.: Convex bodies off center. Arch. d. Math. **3**, 303 (1952). — [10] SCHNEIDER, TH.: Über einen Hlawkaschen Satz aus der Geometrie der Zahlen. Arch. d. Math. **2**, 81—86 (1950).

[7]) Die auf eine noch schärfere Aussage bezügliche Bemerkung in [3a] ist nicht richtig.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 5. November 1954.)

Epheser, H.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 435—454 (1955)

Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben mit gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*).

Von
Helmut Epheser.

Für die Lösbarkeit von Randwertaufgaben mit Differentialgleichungen der Gestalt $y'' = f(x, y, y')$ werden neue hinreichende Bedingungen aufgestellt. — Nach der genauen Formulierung der Aufgaben und Voraussetzungen in § 1 und der Herleitung eines Hilfssatzes in § 2 wird in § 3 aus einem bekannten Existenzsatz ein neuer gewonnen, durch den ein Ergebnis von S. Cinquini weiter ausgebaut wird. § 4 behandelt den Fall, daß die Funktion f nur in einem gewissen zylindrischen Bereich des Raumes ihrer unabhängigen Variablen definiert ist; anknüpfend an Untersuchungen von G. Scorza-Dragoni, M. Nagumo, S. Cinquini und G. Zwirner wird ein neuer Existenzsatz bewiesen, der allerdings wegen seiner komplizierten Formulierung kaum zur unmittelbaren Anwendung geeignet erscheint. Aus ihm ergeben sich aber in § 5 interessante Existenzsätze für den Fall, daß die Funktion f für alle x des zugrunde liegenden Intervalls und beliebige reelle y und y' erklärt ist. Diese Ergebnisse sind allgemeiner als alle bisher bekannten vergleichbaren Aussagen und stellen in einer gewissen, noch zu präzisierenden Hinsicht die Grenze des Erreichbaren dar.

In einer späteren Arbeit werde ich auf die Frage nach der eindeutigen Lösbarkeit eingehen.

§ 1. Problemstellung und Voraussetzungen.

Es werden Randwertaufgaben betrachtet, die durch eine Differentialgleichung

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad (a \leq x \leq b), \tag{0}$$

und eines der drei folgenden Randbedingungssysteme gekennzeichnet sind[1]):

$$y(a) = y(b) = 0 \qquad \text{(Problem I)}, \tag{1}$$

$$y(a) = y'(b) = 0 \qquad \text{(Problem II)}, \tag{2}$$

$$y'(a) = y(b) = 0 \qquad \text{(Problem III)}. \tag{3}$$

*) Diese Arbeit ist ein erster, für den Druck gekürzter Auszug aus meiner Abhandlung „Existenz- und Eindeutigkeitsfragen bei nichtlinearen Randwertaufgaben", die von der Fakultät für Natur- und Geisteswissenschaften der Technischen Hochschule Hannover als Habilitationsschrift angenommen wurde. Für die Anregung zu diesen Untersuchungen danke ich Herrn Prof. Dr. L. Collatz.

[1]) Die homogene Gestalt der Randbedingungen ist hier gewählt worden, weil sie die Formulierung der späteren Sätze erleichtert. Die entsprechenden inhomogenen Randbedingungen lassen sich stets durch eine lineare Substitution der abhängigen Variablen auf die homogenen zurückführen.

Alle vorkommenden Größen werden als reell vorausgesetzt, und es soll $a<b$ sein.

Anstatt das Bestehen der Differentialgleichung (0) im ganzen Intervall $\langle a,b\rangle$ zu verlangen, begnügt man sich zweckmäßigerweise mit der schwächeren Forderung

$$y'(x)-y'(a)=\int_a^x f\left(u,y(u),y'(u)\right)du \quad \text{für} \quad a\leqq x\leqq b. \tag{4}$$

Dadurch wird es möglich, die grundlegenden Voraussetzungen über die Funktion f zu lockern, sofern die Integration im Lebesgueschen Sinne verstanden wird. Im folgenden wird stets verlangt:

Voraussetzung A. *Die Funktion $f(x,y,y')$ sei in ihrem Definitionsbereich für jedes feste x eine stetige Funktion des Veränderlichenpaares (y,y') und für jedes feste Wertepaar (y,y') eine meßbare Funktion von x.*

Diese auf C. CARATHÉODORY [*1*][2]) zurückgehende Voraussetzung wurde von G. SCORZA-DRAGONI [*16*] in die Behandlung der nichtlinearen Randwertaufgaben eingeführt.

In den meisten Fällen erweist es sich als notwendig, weiterhin zu fordern:

Voraussetzung B. *Jedem beschränkten Teilbereich $\mathfrak{D}$ des Definitionsbereiches der Funktion f läßt sich eine nichtnegative, über $\langle a,b\rangle$ integrable Funktion $\mu_{\mathfrak{D}}(x)$ zuordnen, so daß für $(x,y,y')\in\mathfrak{D}$ stets $|f(x,y,y')|\leqq\mu_{\mathfrak{D}}(x)$ ist.*

Als Lösung einer so formulierten Randwertaufgabe wird eine Funktion $y(x)$ angesehen, die im Intervall $a\leqq x\leqq b$ samt ihrer ersten Ableitung totalstetig[3]) ist, der Gl. (4) genügt und die jeweiligen Randbedingungen (1), (2) oder (3) erfüllt. Die ursprüngliche Differentialgleichung (0) gilt dann im allgemeinen nicht mehr für jedes x aus $\langle a,b\rangle$, jedoch immer noch in einem maßgleichen Kern dieses Intervalls.

In §§ 3—5 werden Sätze über die Lösbarkeit der im angegebenen Sinne verstandenen Probleme I, II und III aufgestellt.

§ 2. Herleitung eines Hilfssatzes.

Für die späteren Entwicklungen wird die Aussage benötigt, daß die Funktionen $y(x)$ aus einer gewissen, noch zu charakterisierenden Funktionenmenge $\mathfrak{Y}$ gleichmäßig beschränkte erste Ableitungen besitzen. Das Verfahren zur Herleitung dieser Aussage stammt von M. NAGUMO [*9*]; sein Ergebnis haben T. SATÔ [*11*] und insbesondere L. TONELLI [*19*][4]) weiter ausgebaut.

[2]) Die in eckigen Klammern stehenden Zahlen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

[3]) Zu dem von G. VITALI eingeführten Begriff der absoluten Stetigkeit oder Totalstetigkeit vgl. man z.B.: C. CARATHÉODORY [*1*, Kap. X]. — TONELLI, L.: Fondamenti di calcolo delle variazioni, Bd. 1, S. 62—69. Bologna 1921. — ZORETTI-ROSENTHAL: Encykl. der Math. Wiss., II C Art. 9a), S. 1007ff.

[4]) Dort findet sich zum erstenmal eine einseitige Beschränkung für y'', die etwa der Formel (6) des folgenden Hilfssatzes entspricht. Die volle Ausnutzung dieser Einseitigkeit ist für die Entwicklungen in den §§ 3—5 wesentlich.

G. Scorza-Dragoni [15] bis [18], S. Cinquini [3] bis [5] und G. Zwirner [20], [22], [23] haben die darauf gestützte Beweismethode in mannigfacher Weise auf die Untersuchung des Problems I angewandt und zum Teil noch erweitert. Hier soll die angedeutete Aussage so formuliert werden, daß sie auch für die Behandlung der Probleme II und III verwendbar wird.

Hilfssatz 1. *Es sei $\mathfrak{Y}$ die Menge aller für $a \leqq x \leqq b$ definierten Funktionen $y(x)$, die den nachstehenden Forderungen a) bis d) genügen:*

a) $y(x)$ ist totalstetig und besitzt eine totalstetige erste Ableitung $y'(x)$[5]*.*

b) $y(x)$ genügt einem der drei Randbedingungssysteme (1), (2) *oder* (3).

c) Für jedes $y(x) \in \mathfrak{Y}$ ist

$$|y(x)| \leqq Y \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b, \tag{5}$$

unter Y eine feste positive Zahl verstanden.

d) Es gibt eine Zahl $h \geqq 0$ derart, daß für jedes $y(x) \in \mathfrak{Y}$ fast überall dort, wo $|y'(x)| \geqq h$ ist, die Beschränkung

$$y''(x) \cdot \operatorname{sgn} y(x) \geqq -\{\psi(y) \cdot \varphi(y') + \chi(x) \cdot \omega(y')\} \tag{6}$$

gilt, in der ψ, φ, χ und ω vorgeschriebene Funktionen mit folgenden Eigenschaften sind:

$\chi(x)$ und $\psi(y)$ sind nichtnegativ und über $\langle a, b\rangle$ bzw. $\langle -Y, Y\rangle$ integrabel;

$\omega(y')$ ist für jedes reelle y' nichtnegativ und stetig;

$\varphi(y')$ ist für jedes reelle y' positiv und stetig und erfüllt außerdem die Bedingungen

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\varphi(t)}\, dt = +\infty, \qquad \int_0^{-\infty} \frac{t}{\varphi(t)}\, dt = +\infty; \tag{7}$$

ferner muß entweder

α) eine Konstante $\varkappa > 0$ existieren, so daß für jedes reelle y'

$$\frac{|y'|\,\omega(y')}{\varphi(y')} \leqq \varkappa \tag{8}$$

gilt, oder es muß

β) die Funktion $\chi(x)$ mindestens fast überall in $\langle a, b\rangle$ verschwinden.

Dann gilt für alle $y(x) \in \mathfrak{Y}$ die Beschränkung

$$|y'(x)| \leqq H, \qquad (a \leqq x \leqq b), \tag{9}$$

in der $H > h$ eine Konstante bedeutet, die allein durch die Zahlen Y und h und die Funktionen ψ, φ, χ und ω bestimmt ist.

---

[5]) Daraus folgt, daß fast überall in $\langle a, b\rangle$ auch eine zweite Ableitung $y''(x)$ vorhanden ist und daß für jedes Teilintervall $\langle x_1, x_2\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ die Beziehung

$$y'(x_2) - y'(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \dot{y}'(x)\, dx$$

gilt, wenn $\dot{y}'(x)$ eine im Intervall $\langle x_1, x_2\rangle$ definierte Funktion bedeutet, die in einem maßgleichen Kern dieses Intervalls mit $y''(x)$ übereinstimmt und in den übrigen Punkten verschwindet.

Beweis. Es wird eine beliebige Funktion $y(x)$ aus der Menge $\mathfrak{Y}$ herausgegriffen. Dann läßt sich das Intervall $\langle a, b\rangle$ in drei zueinander punktfremde, meßbare Teilmengen $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ zerlegen, so daß

$$y(x)\cdot y'(x)\begin{cases} =0 & \text{für} \quad x\in\mathfrak{E}_0 \\ >0 & \text{für} \quad x\in\mathfrak{E}_1 \\ <0 & \text{für} \quad x\in\mathfrak{E}_2 \end{cases}$$

gilt. Die Menge $\mathfrak{E}_0$ ist abgeschlossen und sicher nicht leer, da sie die Punkte $x=a$ und $x=b$ enthält. Gibt es in $\mathfrak{E}_0$ innere Punkte, so muß in ihnen, wie man leicht einsieht, $y'(x)=0$ sein, die Behauptung (9) trifft dort also zu. Jeder andere Punkt von $\mathfrak{E}_0$ ist Randpunkt von $\mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{E}_2$. $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ bestehen je aus höchstens abzählbar unendlich vielen offenen Intervallen. Sei

$\mathfrak{i}_1$: $$\xi_1 < x < \xi_0$$

ein solches Teilintervall, das zu $\mathfrak{E}_1$ gehört. Seine Endpunkte $x=\xi_1$ und $x=\xi_0$ gehören natürlich der Menge $\mathfrak{E}_0$ an. Da $|y(x)|$ in $\mathfrak{i}_1$ mit x monoton wächst, kann ξ_0 keine Nullstelle von $y(x)$ sein, sondern es ist $y'(\xi_0)=0$. Ist nun in $\mathfrak{i}_1$ überall $|y'(x)|\leq h$, so ist (9) dort von selbst erfüllt. Daher wird weiterhin angenommen, es gebe eine Abszisse x mit $\xi_1\leq x<\xi_0$, für die $|y'(x)|>h$ ist. Dann muß es eine weitere Zahl ξ_h mit $x<\xi_h\leq\xi_0$ geben, so daß für $x\leq u<\xi_h$ beständig $|y'(u)|>h$ ist, zugleich aber die Beziehung $y'(\xi_h)=\sigma\cdot h$ besteht, worin

$$\sigma=\operatorname{sgn} y(u)=\operatorname{sgn} y'(u) \qquad (\text{für } u\in\mathfrak{i}_1)$$

gesetzt ist. Nach Voraussetzung d) gilt dann die Beschränkung (6) mit u an Stelle von x fast überall im Intervall $x\leq u<\xi_h$, und durch Multiplikation mit $\frac{|y'(u)|}{\varphi(y'(u))}$ folgt wegen $\operatorname{sgn} y'(u)=\operatorname{sgn} y(u)$ sofort:

$$\frac{y'(u)\cdot y''(u)}{\varphi(y'(u))}\geq -\psi(y(u))\,|y'(u)| - \frac{|y'(u)|\cdot\omega(y'(u))}{\varphi(y'(u))}\,\chi(u)$$

fast überall im Intervall $\langle x, \xi_h\rangle$. Integriert man diese Beziehung über das genannte Intervall [vgl. Fußnote [5])], so kann man auf der linken Seite und beim ersten Glied der rechten Seite einfache Substitutionen vornehmen und erhält nach Vorzeichenumkehr

$$\int_{\sigma\cdot h}^{y'(x)}\frac{t}{\varphi(t)}\,dt\leq \int_{y(x)}^{y(\xi_h)}\psi(y)\,dy + \int_{x}^{\xi_h}\frac{|y'(u)|\cdot\omega(y'(u))}{\varphi(y'(u))}\,\chi(u)\,du.$$

Der erste Summand rechts ist $\leq\int_{-Y}^{Y}\psi(y)\,dy$; der zweite hat unter der Voraussetzung d β) den Wert Null und kann unter der Voraussetzung d α) durch $\varkappa\int_a^b\chi(u)\,du$ nach oben abgeschätzt werden. In beiden Fällen läßt sich also

eine positive Zahl Q angeben, so daß $\int_{\sigma \cdot h}^{y'(x)} \frac{t}{\varphi(t)}\, dt \leq Q$ ist. Nach (7) gibt es andererseits eine Konstante $H > h$, für die mit $\varepsilon > 0$ stets

$$\int_{h}^{H+\varepsilon} \frac{t}{\varphi(t)}\, dt > Q, \qquad \int_{-h}^{-H-\varepsilon} \frac{t}{\varphi(t)}\, dt > Q$$

ist. Daraus folgt unmittelbar die Beschränkung (9) für $\xi_1 \leq x \leq \xi_0$, also für alle inneren Punkte und Randpunkte von $\mathfrak{E}_1$.

Da sich eine entsprechende Betrachtung auch für die Menge $\mathfrak{E}_2$ und ihre Randpunkte anstellen läßt, gilt (9) durchweg für $a < x < b$ und dann aus Stetigkeitsgründen auch für $x = a$ und $x = b$.

Ohne Schwierigkeit ergibt sich der folgende

Zusatz zum Hilfssatz 1. *Im Hilfssatz 1 ist die Voraussetzung c)* [*mit der Beschränkung* (5)] *entbehrlich, wenn das Integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\, dy$$

endlich bleibt.

§ 3. Erste Existenzsätze.

Die Grundlage der weiteren Entwicklungen bildet der

Satz 1. *Wenn die Funktion $f(x, y, y')$ für $a \leq x \leq b$ und alle reellen Werte von y und y' der Voraussetzung A aus § 1 unterliegt und wenn*

$$|f(x, y, y')| \leq \mu(x)$$

ist, unter $\mu(x)$ eine nichtnegative, über $\langle a, b \rangle$ integrable Funktion verstanden, dann besitzt jedes der Probleme I, II und III mindestens eine Lösung.

Für Problem I ist dieser Satz wohlbekannt; er findet sich zuerst bei G. Scorza-Dragoni [*16*]. Die verschiedenen bisher gegebenen Beweise[6]) können mit geringen Änderungen auch auf die Probleme II und III übertragen werden; auf nähere Ausführungen hierüber wird an dieser Stelle verzichtet.

Nach diesen Vorbereitungen soll nun der folgende Satz bewiesen werden, der eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von S. Cinquini [*3*][7]) darstellt:

Satz 2. *Die Funktion $f(x, y, y')$ unterliege in dem Bereich*

$$\mathfrak{S}: \qquad a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty$$

[6]) Außer der schon genannten Arbeit vgl. man z.B.: S. Cinquini [*3*], [*4*]; G. Zwirner [*21*]; E. Magenes [*8*].

[7]) Ein anderer Beweis findet sich bei G. Zwirner [*23*]. Die hier gegebene Erweiterung besteht erstens in der Einbeziehung der Probleme II und III, zweitens in dem Ersatz einer absoluten Beschränkung der Funktion f durch die einseitige Beschränkung (10) [vgl. Fußnote [4])].

den Voraussetzungen A und B aus § 1, und es sei überall in diesem Bereich die Bedingung

$$f(x, y, y') \cdot \operatorname{sgn} y \geqq -\{\psi(y) \cdot \varphi(y') + \chi(x) \cdot \omega(y')\} \tag{10}$$

erfüllt, in der $\psi(y)$ für alle reellen y nichtnegativ und über $(-\infty, +\infty)$ integrabel sei und die Funktionen χ, φ und ω den Forderungen der Voraussetzung d) des Hilfssatzes 1 genügen sollen. Dann hat jedes der Probleme I, II und III mindestens eine Lösung.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 samt Zusatz ist den Funktionen ψ, φ, χ und ω (und der Konstanten $h = 0$) eine Zahl $H > 0$ zugeordnet; mit ihrer Hilfe wird ein beschränkter Teilbereich von $\mathfrak{S}$ konstruiert, nämlich:

$$\mathfrak{Q}: \qquad a \leqq x \leqq b, \quad |y| \leqq H \cdot (b - a), \quad |y'| \leqq H.$$

Dann gibt es nach Voraussetzung B eine nichtnegative, über $\langle a, b\rangle$ integrable Funktion $\mu_{\mathfrak{Q}}(x)$, so daß für $(x, y, y') \in \mathfrak{Q}$ stets

$$|f(x, y, y')| \leqq \mu_{\mathfrak{Q}}(x)$$

ist. Setzt man nun

$$\tilde{f}(x, y, y') = \begin{cases} f(x, y, y'), & \text{wo} \quad |f(x, y, y')| \leqq \mu_{\mathfrak{Q}}(x) \\ \mu_{\mathfrak{Q}}(x), & \text{wo} \quad f(x, y, y') > \mu_{\mathfrak{Q}}(x) \\ -\mu_{\mathfrak{Q}}(x), & \text{wo} \quad f(x, y, y') < -\mu_{\mathfrak{Q}}(x), \end{cases}$$

so genügt auch diese neue Funktion in $\mathfrak{S}$ der Voraussetzung A, und es gilt in diesem ganzen Bereich die Beschränkung $|\tilde{f}(x, y, y')| \leqq \mu_{\mathfrak{Q}}(x)$. Nach Satz 1 besitzt dann jedes der Probleme I, II und III mit $\tilde{f}$ an Stelle von f mindestens eine Lösung $y(x)$. Da nun beständig $|\tilde{f}(x, y, y')| \leqq |f(x, y, y')|$ ist und $\tilde{f}$ und f nirgends entgegengesetzte Vorzeichen haben, überträgt sich die Beschränkung (10) auf die Funktion $\tilde{f}$. Für $y(x)$ gilt danach fast überall in $\langle a, b\rangle$ die Beziehung (6), so daß aus Hilfssatz 1 die Beschränkung (9) folgt. Diese liefert zusammen mit den Randbedingungen weiter:

$$|y(x)| \leqq H \cdot (b - a) \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b. \tag{11}$$

(9) und (11) zeigen aber, daß jedes Linienelement $\{x, y(x), y'(x)\}$ der Kurve $y = y(x)$ dem Bereich $\mathfrak{Q}$ angehört, in dem $\tilde{f}$ definitionsgemäß mit f zusammenfällt. Demnach ist $y(x)$ auch eine Lösung des jeweiligen Ausgangsproblems, und Satz 2 ist bewiesen.

§ 4. Der Fall eines zylindrischen Grundbereiches.

Im folgenden braucht die Funktion f nicht in der ganzen Schicht $\mathfrak{S}$ erklärt zu sein, sondern nur in einem Zylinderbereich

$$\mathfrak{Z}: \qquad a \leqq x \leqq b, \quad \underline{y}(x) \leqq y \leqq \bar{y}(x), \quad -\infty < y' < +\infty.$$

Für das Problem I ist dieser Fall von G. SCORZA-DRAGONI [12] bis [18], M. NAGUMO [9], S. CINQUINI [2], [3], [5] und G. ZWIRNER [20], [22] behandelt

worden. Eine Erweiterung der von den genannten Autoren gefundenen Ergebnisse[8]) bildet der folgende

Satz 3. *In einem Bereich $\mathfrak{Z}$ des eben angegebenen Typs genüge die Funktion $f(x, y, y')$ den Voraussetzungen A und B aus § 1, und es seien folgende weitere Bedingungen erfüllt:*

a) Die Funktionen $\underline{y}(x)$ und $\bar{y}(x)$ sind für $a \leqq x \leqq b$ samt ihren ersten Ableitungen totalstetig, und es ist $\underline{y}(x) < 0 < \bar{y}(x)$ für $a \leqq x \leqq b$.

b) Die beiden Differenzen

$$\underline{y}'(x) - \int_a^x f\left(u, \underline{y}(u), \underline{y}'(u)\right) du \quad \text{und} \quad \int_a^x f\left(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\right) du - \bar{y}'(x)$$

sind für $a \leqq x \leqq b$ nichtabnehmende Funktionen von x.

c) Im ganzen Bereich $\mathfrak{Z}$ ist

$$f(x, y, y') \cdot \operatorname{sgn} y \geqq -\{\psi(y) \cdot \varphi(y') + \chi(x) \cdot \omega(y')\}, \tag{12}$$

wobei die Funktionen ψ, φ, χ und ω die in Voraussetzung d) des Hilfssatzes 1 geforderten Eigenschaften haben[9]).

Dann besitzt Problem I mindestens eine Lösung $y(x)$ mit

$$\underline{y}(x) \leqq y(x) \leqq \bar{y}(x) \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b. \tag{13}$$

Ist darüber hinaus die Zusatzbedingung

$$\mathrm{d_{II}} \qquad \underline{y}'(b) \leqq 0, \qquad \bar{y}'(b) \geqq 0 \qquad \textit{bzw.}$$

$$\mathrm{d_{III}} \qquad \underline{y}'(a) \geqq 0, \qquad \bar{y}'(a) \leqq 0$$

erfüllt, so hat auch Problem II bzw. III mindestens eine der Eingrenzung (13) genügende Lösung $y(x)$.

Beweis. α) Mit den Konstanten

$$\delta_r = \frac{1}{r+2} \operatorname{Min}\left(\bar{y}(x) - \underline{y}(x)\right), \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

werden die beiden Funktionenfolgen

$$\underline{y}_r(x) = \underline{y}(x) + \delta_r, \quad \bar{y}_r(x) = \bar{y}(x) - \delta_r, \quad (r = 1, 2, \ldots),$$

erklärt, die eine Folge von Teilbereichen

$$\mathfrak{Z}_{(r)}: \quad a \leqq x \leqq b, \quad \underline{y}_r(x) \leqq y \leqq \bar{y}_r(x), \quad -\infty < y' < +\infty, \quad (r = 1, 2, \ldots),$$

des Grundbereiches $\mathfrak{Z}$ festlegen. Dann wird in der nachstehenden Weise eine Funktionenfolge $f_r(x, y, y')$, $(r = 1, 2, \ldots)$ definiert:

1. Im Teilbereich $\mathfrak{Z}_{(r)}$ sei $f_r = f$.

[8]) Neu ist auch bei diesem Satz in der Hauptsache die einseitige Beschränkung (12), die an die Stelle einer absoluten Beschränkung tritt [vgl. Fußnote [7])].

[9]) Die positive Konstante Y ist dabei so zu wählen, daß im Intervall $a \leqq x \leqq b$ beständig $\underline{y}(x) \geqq -Y$ und $\bar{y}(x) \leqq Y$ gilt.

2. Für jedes Wertepaar (x, y) mit $a \leqq x \leqq b$, $\underline{y}(x) \leqq y < \underline{y}_r(x)$ sei

$$f_r(x, y, y') = f(x, y, y'),$$

wenn entweder

$$y' = \underline{y}'(x) \quad \text{oder} \quad |y' - \underline{y}'(x)| \geqq \underline{y}_r(x) - y \quad \text{ist};$$

in den beiden Intervallen

$$\underline{y}'(x) - (\underline{y}_r(x) - y) \leqq y' \leqq \underline{y}'(x)$$

und

$$\underline{y}'(x) \leqq y' \leqq \underline{y}'(x) + (\underline{y}_r(x) - y)$$

sei f_r eine lineare Funktion von y'.

3. Für jedes Wertepaar (x, y) mit $a \leqq x \leqq b$, $\bar{y}_r(x) < y \leqq \bar{y}(x)$ sei

$$f_r(x, y, y') = f(x, y, y'),$$

wenn entweder

$$y' = \bar{y}'(x) \quad \text{oder} \quad |y' - \bar{y}'(x)| \geqq y - \bar{y}_r(x)$$

ist; in den beiden Intervallen

$$\bar{y}'(x) - (y - \bar{y}_r(x)) \leqq y' \leqq \bar{y}'(x)$$

und

$$\bar{y}'(x) \leqq y' \leqq \bar{y}'(x) + (y - \bar{y}_r(x))$$

sei f_r eine lineare Funktion von y'.

Jede der so erklärten Funktionen $f_r(x, y, y')$ $(r = 1, 2, \ldots)$, genügt in $\mathfrak{Z}$ den Voraussetzungen A und B. Bezeichnet man mit h die größere der beiden Zahlen $\operatorname{Max}|\underline{y}'(x)| + \delta_1$, $\operatorname{Max}|\bar{y}'(x)| + \delta_1$, so folgt aus der Definition der f_r ferner:

$$(14) \quad f_r(x, y, y') = f(x, y, y'), \quad (r = 1, 2, \ldots), \quad \text{für} \quad (x, y, y') \in \mathfrak{Z}, \quad |y'| \geqq h.$$

Für jedes x aus $\langle a, b \rangle$ und jeden beliebigen Index r soll jetzt unter $\lambda_r(x)$ die größte der folgenden fünf Zahlen verstanden werden:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1; \quad |f(x, \underline{y}(x), \underline{y}'(x) \pm \delta_r) - f(x, \underline{y}(x), \underline{y}'(x))| \cdot \frac{1}{\delta_r}; \\ \qquad |f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x) \pm \delta_r) - f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))| \cdot \frac{1}{\delta_r}, \end{array} \right.$$

Die so erklärten Funktionen $\lambda_r(x)$ sind nach den Voraussetzungen A und B meßbar und über $\langle a, b \rangle$ integrabel. Aus ihrer Definition folgen ferner die für später wichtigen Abschätzungen:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} |f_r(x, \underline{y}(x), y') - f_r(x, \underline{y}(x), \underline{y}'(x))| \leqq \lambda_r(x) \cdot |y' - \underline{y}'(x)| \\ \qquad \text{für} \quad |y' - \underline{y}'(x)| \leqq \delta_r \\ |f_r(x, \bar{y}(x), y') - f_r(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))| \leqq \lambda_r(x) \cdot |y' - \bar{y}'(x)| \\ \qquad \text{für} \quad |y' - \bar{y}'(x)| \leqq \delta_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots). \end{array} \right.$$

Nun sei $H > h$ diejenige Konstante, die nach Hilfssatz 1 den Zahlen Y [Fußnote [9])] und h und den in (12) auftretenden Funktionen ψ, φ, χ und ω zugeordnet ist. Zu dem beschränkten Teilbereich

$$\mathfrak{Z}_H: \qquad a \leqq x \leqq b, \qquad \underline{y}(x) \leqq y \leqq \bar{y}(x), \qquad -H \leqq y' \leqq H$$

des Zylinders $\mathfrak{Z}$ gehört dann nach Voraussetzung B eine nichtnegative, über $\langle a, b\rangle$ integrable Funktion $\mu_H(x)$, so daß in $\mathfrak{Z}_H$

$$|f(x, y, y')| \leqq \mu_H(x)$$

gilt. Dann bestehen auch die Beschränkungen

$$|f_r(x, y, y')| \leqq \mu_H(x), \quad (r = 1, 2, \ldots), \qquad \text{für} \quad (x, y, y') \in \mathfrak{Z}_H. \tag{16}$$

Hiernach wird nun in $\mathfrak{Z}$ eine neue Funktionenfolge $\{\tilde{f}_r(x, y, y')\}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ wie folgt erklärt:

$$\tilde{f}_r(x, y, y') = \begin{cases} f_r(x, y, y'), & \text{wo} \quad |f_r(x, y, y')| \leqq \mu_H(x) \\ \mu_H(x), & \text{wo} \quad f_r(x, y, y') > \mu_H(x) \\ -\mu_H(x), & \text{wo} \quad f_r(x, y, y') < -\mu_H(x). \end{cases}$$

Außer den damit unmittelbar gegebenen Beschränkungen

$$|\tilde{f}_r(x, y, y')| \leqq \mu_H(x), \quad (r = 1, 2, \ldots), \qquad \text{in } \mathfrak{Z}$$

folgen aus diesen Definitionen in Verbindung mit (14) und (12) die Beziehungen

$$\begin{cases} \tilde{f}_r(x, y, y') \cdot \operatorname{sgn} y \geqq -\{\psi(y)\varphi(y') + \chi(x)\omega(y')\} \\ \text{für} \quad (x, y, y') \in \mathfrak{Z}, \quad |y'| \geqq h, \qquad (r = 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{17}$$

Weiter werden die Funktionen $\tilde{f}_r$ durch die folgenden Vorschriften[10]) in die ganze Schicht $\mathfrak{S}$ fortgesetzt:

$$\begin{cases} \tilde{f}_r(x, y, y') = \tilde{f}_r(x, \underline{y}(x), y') + \lambda_r(x) \operatorname{tgh}\big(y - \underline{y}(x)\big) & \text{für} \quad y < \underline{y}(x) \\ \tilde{f}_r(x, y, y') = \tilde{f}_r(x, \bar{y}(x), y') + \lambda_r(x) \operatorname{tgh}\big(y - \bar{y}(x)\big) & \text{für} \quad y > \bar{y}(x), \\ & (r = 1, 2, \ldots), \end{cases} \tag{18}$$

so daß in $\mathfrak{S}$ die Beschränkungen

$$|\tilde{f}_r(x, y, y')| \leqq \mu_H(x) + \lambda_r(x), \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

gelten.

Dann gibt es nach Satz 1 für jedes der Probleme I, II und III mit $\tilde{f}_r$ an Stelle von f mindestens eine Lösungsfunktion $y_r(x)$, die den jeweiligen Randbedingungen genügt, eine in $\langle a, b\rangle$ totalstetige erste Ableitung besitzt und die Gleichung

$$y_r'(x) - y_r'(a) = \int_a^x \tilde{f}_r\big(u, y_r(u), y_r'(u)\big)\, du, \quad (r = 1, 2, \ldots), \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b \tag{19}$$

erfüllt.

[10]) Die angegebene Fortsetzung ist durchaus nicht die einzig brauchbare; es kommt nur darauf an, daß $\tilde{f}_r$ außerhalb des Bereiches $\mathfrak{Z}$ bei festen Werten von x und y' mit y monoton wächst, aber für $y \to \pm\infty$ beschränkt bleibt.

β) Das Kernstück des Beweises bildet nun der Nachweis, daß jede der Funktionen $y_r(x)$ der Eingrenzung

$$\underline{y}(x) \leq y_r(x) \leq \bar{y}(x), \qquad (a \leq x \leq b, \quad r = 1, 2, \ldots) \tag{20}$$

genügt.

Um diesen Nachweis indirekt zu führen, wird angenommen, für irgendein (im folgenden festes) r gäbe es im Inneren von $\langle a, b\rangle$ eine Abszisse x^*, bei der entgegen der Behauptung $y_r(x^*) - \bar{y}(x^*) > 0$ wäre. Dann müßte die Ungleichung

$$y_r(x) - \bar{y}(x) > 0 \tag{21}$$

auch in einer Umgebung des Wertes x^* gelten, und es sei (a', b') das größte x^* enthaltende offene Teilintervall von $\langle a, b\rangle$, in dem das überall zutrifft. In den Fällen der Probleme I und II folgt aus dieser Definition in Verbindung mit den Randbedingungen und der Voraussetzung a) sofort:

$$a' > a, \quad y_r(a') - \bar{y}(a') = 0, \tag{21a}$$

und entsprechend ergibt sich für die Fälle der Probleme I und III:

$$b' < b, \quad y_r(b') - \bar{y}(b') = 0. \tag{21b}$$

Ferner gelten stets die Beziehungen

$$y_r'(a') - \bar{y}'(a') \geq 0, \tag{21c}$$

$$y_r'(b') - \bar{y}'(b') \leq 0; \tag{21d}$$

sie folgen entweder aus (21), (21a) und (21b) oder, falls $a' = a$ bzw. $b' = b$ sein sollte, aus den Zusatzvoraussetzungen d_{III}) bzw. d_{II}) in Verbindung mit den Randbedingungen (3) bzw. (2).

Das Intervall (a', b') wird nun in drei zueinander fremde Teilmengen $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ zerlegt, so daß

$$y_r'(x) - \bar{y}'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad x \in \mathfrak{R}_1 \\ = 0 & \text{für} \quad x \in \mathfrak{R}_0 \\ < 0 & \text{für} \quad x \in \mathfrak{R}_2 \end{cases} \tag{22}$$

ist. In den Fällen der Probleme I und II ist $\mathfrak{R}_1$ nicht leer, und es besteht aus höchstens abzählbar unendlich vielen zueinander punktfremden, offenen Intervallen

$\mathfrak{k}_1$: $$\alpha < x < \gamma,$$

wobei stets

$$y_r'(\gamma) - \bar{y}'(\gamma) = 0 \tag{22a}$$

gilt. Ist nämlich $\gamma < b'$, so folgt das unmittelbar aus der Erklärung der Intervalle $\mathfrak{k}_1$; ist aber $\gamma = b'$, so ist (22a) eine Folge von (21d). — Entsprechend ist

in den Fällen der Probleme I und III die Menge $\mathfrak{R}_2$ nicht leer, und sie besteht aus höchstens abzählbar unendlich vielen offenen Intervallen

$\mathfrak{k}_2$: $$\delta < x < \beta,$$

wobei stets

(22b) $$y_r'(\delta) - \bar{y}'(\delta) = 0$$

ist.

Nun wird eines der Intervalle $\mathfrak{k}_1$ betrachtet und für irgendein x aus ihm folgendes berechnet:

$$y_r'(x) - \bar{y}'(x) = y_r'(\gamma) + \int_\gamma^x \tilde{f}_r\big(u, y_r(u), y_r'(u)\big)\,du - \bar{y}'(x)$$

$$= \bar{y}'(\gamma) + \int_\gamma^x \tilde{f}_r\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big)\,du +$$

$$+ \int_\gamma^x \{\tilde{f}_r\big(u, \bar{y}(u), y_r'(u)\big) - \tilde{f}_r\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big)\}\,du +$$

$$+ \int_\gamma^x \{\tilde{f}_r\big(u, y_r(u), y_r'(u)\big) - \tilde{f}_r\big(u, \bar{y}(u), y_r'(u)\big)\}\,du - \bar{y}'(x).$$

Beachtet man, daß auf Grund der gegebenen Definitionen

$$\tilde{f}_r\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big) = f_r\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big) = f\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big)$$

ist, und berücksichtigt man (18), so entsteht:

$$y_r'(x) - \bar{y}'(x) = \underbrace{\int_a^x f\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big)\,du - \bar{y}'(x) - \Big\{\int_a^\gamma f\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big)\,du - \bar{y}'(\gamma)\Big\}}_{\sigma_1} +$$

$$+ \underbrace{\int_\gamma^x \{\tilde{f}_r\big(u, \bar{y}(u), y_r'(u)\big) - \tilde{f}_r\big(u, \bar{y}(u), \bar{y}'(u)\big)\}\,du}_{\sigma_2} +$$

$$+ \underbrace{\int_\gamma^x \lambda_r(u)\,\mathrm{tgh}\,\big(y_r(u) - \bar{y}(u)\big)\,du}_{\sigma_3}.$$

Nach Voraussetzung b) ist wegen $x < \gamma$ sicher

$$\sigma_1 \leqq 0.$$

Wegen der Stetigkeit der Ableitungen kann man auf Grund von (22a) x so nahe an γ heranrücken lassen, daß für $x \leqq u \leqq \gamma$ beständig

$$|y_r'(u) - \bar{y}'(u)| \leqq \delta_r$$

ausfällt. Dann ist zunächst sicher $|y_r'(u)| \leqq h < H$, und in dem Ausdruck für σ_2 kann daher die Funktion $\tilde{f}_r$ auf Grund ihrer Definition durch f_r ersetzt werden.

Dann ergibt sich mit Hilfe der Abschätzung (15):

$$|\sigma_2| \leq -\int_{\gamma}^{x} \lambda_r(u) \cdot |y_r'(u) - \bar{y}'(u)|\, du.$$

Dann folgt

$$\sigma_2 + \sigma_3 \leq \int_{\gamma}^{x} \lambda_r(u) \cdot \{\operatorname{tgh}(y_r(u) - \bar{y}(u)) - |y_r'(u) - \bar{y}'(u)|\}\, du.$$

Nun werde

$$\operatorname{tgh}(y_r(\gamma) - \bar{y}(\gamma)) = \tau > 0$$

gesetzt und x dem Werte γ so weit genähert, daß für $x \leq u \leq \gamma$ die Ungleichungen

$$\operatorname{tgh}(y_r(u) - \bar{y}(u)) > \frac{\tau}{2}$$

$$|y_r'(u) - \bar{y}'(u)| < \frac{\tau}{2}$$

zugleich erfüllt sind. Wegen $x < \gamma$ und $\lambda_r(u) \geq 1$ wird danach $\sigma_2 + \sigma_3 < 0$, und es ergibt sich:

$$y_r'(x) - \bar{y}'(x) < 0.$$

Dieses Ergebnis steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß x der Menge $\mathfrak{K}_1$ angehört.

Ein ebensolcher Widerspruch läßt sich auch für gewisse $x \in \mathfrak{K}_2$ konstruieren. Die Annahme, es gäbe in $\langle a, b\rangle$ eine Abszisse x^*, für die $y_r(x^*) - \bar{y}(x^*) > 0$ ausfällt, ist also falsch, es gilt für $a \leq x \leq b$ beständig:

$$y_r(x) \leq \bar{y}(x), \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

In völlig entsprechender Weise kann man auch zeigen, daß für $a \leq x \leq b$ beständig

$$y_r(x) \geq \underline{y}(x), \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

sein muß, und man hat dann die Behauptung (20) für alle drei untersuchten Probleme bewiesen.

γ) Jedes Linienelement $\{x, y_r(x), y_r'(x)\}$, das einer der Lösungskurven $y = y_r(x)$ angehört, liegt hiernach im Bereich $\mathfrak{Z}$. Aus (19) und (17) wird ersichtlich, daß die $y_r(x)$ der Funktionenmenge $\mathfrak{Y}$ angehören, auf die sich der Hilfssatz 1 bezieht. Aus ihm folgt dann:

$$|y_r'(x)| \leq H, \qquad (a \leq x \leq b,\ r = 1, 2, \ldots); \tag{23}$$

die Linienelemente liegen also sogar in dem beschränkten Teilbereich $\mathfrak{Z}_H$, in dem nach Definition $\tilde{f}_r = f_r$ ist. Demnach genügen die $y_r(x)$ den [dann mit (19) gleichbedeutenden] Beziehungen

$$y_r'(x) - y_r'(a) = \int_{a}^{x} f_r(u, y_r(u), y_r'(u))\, du, \qquad (a \leq x \leq b,\ r = 1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Die Ableitungen $y_r'(x)$ sind nach (23) gleichmäßig beschränkt. Aus (24) folgt auf Grund von (20) und (23) wegen (16):

$$|y_r'(x_2) - y_r'(x_1)| \leq \int_{x_1}^{x_2} \mu_H(u)\, du, \qquad (a \leq x_1 < x_2 \leq b, \quad r = 1, 2, \ldots),$$

eine Beziehung, die die gleichgradige Stetigkeit der $y_r'(x)$ zum Ausdruck bringt. Die gleichmäßige Beschränktheit und gleichgradige Stetigkeit der $y_r(x)$ sind aus (20) und (23) unmittelbar ersichtlich. Aus der Folge der $y_r(x)$ läßt sich demnach eine Teilfolge $y_{r_1}(x), y_{r_2}(x), \ldots$ aussondern, die samt ihrer Ableitungsfolge für jedes x aus $\langle a, b\rangle$ konvergent ist und eine stetige Grenzfunktion $y(x)$ mit stetiger Ableitung $y'(x)$ definiert. Für sie gilt wegen (20) sicher die Eingrenzung (13).

Nun wird die Gültigkeit der folgenden Gleichung nachgewiesen:

$$\lim_{\nu \to \infty} f_{r_\nu}\left(x, y_{r_\nu}(x), y_{r_\nu}'(x)\right) = f\left(x, y(x), y'(x)\right). \tag{25}$$

Um das einzusehen, erteile man x einen festen Wert $\tilde{x}$ und schließe zunächst die Sonderfälle $y(\tilde{x}) = \underline{y}(\tilde{x})$ und $y(\tilde{x}) = \bar{y}(\tilde{x})$ aus. Dann läßt sich eine natürliche Zahl ν^* so angeben, daß das Linienelement $\{\tilde{x}, y(\tilde{x}), y'(\tilde{x})\}$ samt einer gewissen Umgebung in den Teilbereich $\mathfrak{B}_{(r_{\nu^*})}$ [vgl. α)] und damit auch in alle Teilbereiche $\mathfrak{B}_{(r_\nu)}$ mit $\nu \geqq \nu^*$ fällt. Da die Folge der Zahlenpaare $\{y_{r_\nu}(\tilde{x}), y_{r_\nu}'(\tilde{x})\}$ gegen das Zahlenpaar $\{y(\tilde{x}), y'(\tilde{x})\}$ konvergiert, gibt es eine weitere natürliche Zahl $\nu^{**} \geqq \nu^*$, so daß für $\nu \geqq \nu^{**}$ stets

$$\{\tilde{x}, y_{r_\nu}(\tilde{x}), y_{r_\nu}'(\tilde{x})\} \in \mathfrak{B}_{(r_\nu)}$$

ist. Nach der in α) gegebenen Erklärung der f_{r_ν} ist dann weiter

$$f_{r_\nu}\left(\tilde{x}, y_{r_\nu}(\tilde{x}), y_{r_\nu}'(\tilde{x})\right) = f\left(\tilde{x}, y_{r_\nu}(\tilde{x}), y_{r_\nu}'(\tilde{x})\right) \quad \text{für} \quad \nu \geqq \nu^{**}.$$

Hiernach ist dann (25) eine Folge der Voraussetzung A.

Es bleiben noch die erwähnten Ausnahmefälle zu behandeln. Für den betrachteten Abszissenwert $\tilde{x}$ sei etwa $y(\tilde{x}) = \bar{y}(\tilde{x})$; dann muß auch $y'(\tilde{x}) = \bar{y}'(\tilde{x})$ sein, da sonst ein Widerspruch zu (13) unvermeidlich wäre. In diesem Falle kann es auch für beliebig große ν noch Zahlenpaare $\{y_{r_\nu}(\tilde{x}), y_{r_\nu}'(\tilde{x})\}$ geben, für die $f_{r_\nu} \neq f$ ist. Auf Grund der in α) gegebenen Erklärungen liegt dann aber $f_{r_\nu}\left(\tilde{x}, y_{r_\nu}(\tilde{x}), y_{r_\nu}'(\tilde{x})\right)$ zwischen der größten und der kleinsten der drei Zahlen

$$f\left(\tilde{x}, y_{r_\nu}(\tilde{x}), \bar{y}'(\tilde{x})\right), \qquad f\left[\tilde{x}, y_{r_\nu}(\tilde{x}), \bar{y}'(\tilde{x}) \pm \left(y_{r_\nu}(\tilde{x}) + \delta_{r_\nu} - \bar{y}(\tilde{x})\right)\right].$$

Da jede dieser drei Zahlen mit $\nu \to \infty$ gegen $f\left(\tilde{x}, \bar{y}(\tilde{x}), \bar{y}'(\tilde{x})\right)$ konvergiert, gilt (25) auch im vorliegenden Falle. Da sich der Fall $y(\tilde{x}) = \underline{y}(\tilde{x})$ in entsprechender Weise erledigt, ist (25) hiermit allgemein bewiesen.

Läßt man nun in (24) den Index r die Folge $r_1, r_2, \ldots$ durchlaufen, so folgt aus (25) nach einem bekannten Satz über Lebesguesche Integrale, daß die Grenzfunktion $y(x)$ der Gl. (4) genügt. Sie ist dann samt ihrer ersten Ableitung totalstetig, weil die rechte Seite von (4) eine totalstetige Funktion

von x ist, und sie genügt schließlich den Randbedingungen (1), (2) oder (3), weil die Funktionen $y_r(x)$ bereits diesen Bedingungen genügten. Die Funktion $y(x)$ ist somit eine Lösung der jeweils vorliegenden Randwertaufgabe, und der Satz 3 ist vollständig bewiesen.

§ 5. Weitere Existenzsätze.

Der nunmehr bewiesene Satz 3 dient im folgenden als Grundlage zur Gewinnung weiterer Sätze, die als die wesentlichen Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung zu betrachten sind. Dabei werden gewisse lineare Differentialgleichungen zum Vergleich herangezogen.

Unter $p(x), q(x), r(x)$ werden nichtnegative, über $\langle a, b\rangle$ integrable Funktionen verstanden. Ist c eine beliebige Zahl aus dem Intervall $\langle a, b\rangle$, so soll mit $w_1(x; c)$ die Lösung[11]) der durch die homogene lineare Differentialgleichung

$$w_1'' + p(x)\, w_1' + q(x)\, w_1 = 0 \tag{26a}$$

und die Anfangsbedingungen

$$w_1(c) = 1, \quad w_1'(c) = 0 \tag{27a}$$

gekennzeichneten Anfangswertaufgabe bezeichnet werden. Entsprechend werde $w_2(x; c)$ durch die Differentialgleichung

$$w_2'' - p(x)\, w_2' + q(x)\, w_2 = 0 \tag{26b}$$

und die Anfangsbedingungen

$$w_2(c) = 1, \quad w_2'(c) = 0 \tag{27b}$$

bestimmt. — Mit diesen Bezeichnungen gilt der

Satz 4. *$f(x, y, y')$ genüge in der Schicht*

$$\mathfrak{S}: \qquad a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty, \quad -\infty < y' < +\infty$$

den Voraussetzungen A und B aus § 1 und der Beschränkung

$$f(x, y, y') \cdot \operatorname{sgn} y \geq -\{p(x)\,|y'| + q(x)\,|y| + r(x)\}, \tag{28}$$

in der unter $p(x)$, $q(x)$ und $r(x)$ nichtnegative, über $\langle a, b\rangle$ integrable Funktionen zu verstehen sind.

α) Sind $p(x)$ und $q(x)$ so beschaffen, daß die [durch (26a) *und* (27a) *mit $c = b$ definierte] Funktion $w_1(x; b)$ überall in $\langle a, b\rangle$ positive Werte annimmt, so besitzen die Probleme I und II je mindestens eine Lösung.*

β) Ebenso sind die Probleme I und III stets lösbar, wenn die [durch (26b) *und* (27b) *mit $c = a$ definierte] Funktion $w_2(x; a)$ überall in $\langle a, b\rangle$ positiv ausfällt.*

---

[11]) Die hier genannten (linearen) Anfangswertaufgaben besitzen unter den gemachten Voraussetzungen eindeutig bestimmte Lösungen, die im ganzen Intervall $\langle a, b\rangle$ existieren. Bei diesen „Lösungen" handelt es sich wieder um Funktionen, die samt ihren ersten Ableitungen totalstetig sind und die der jeweiligen Differentialgleichung in einem maßgleichen Kern des genannten Intervalls genügen.

γ) Schließlich ist Problem I auch dann noch stets lösbar, wenn sich die Zahl c im Inneren von $\langle a, b\rangle$ so angeben läßt, daß

$$w_1(x;c) > 0 \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq c, \tag{29a}$$

$$w_2(x;c) > 0 \quad \text{für} \quad c \leqq x \leqq b \tag{29b}$$

gilt.

Zum Beweise dieses Satzes sind einige Tatsachen über die Lösungen gewisser inhomogener linearer Differentialgleichungen heranzuziehen, die mit den in (26a) und (26b) auftretenden Differentialausdrücken gebildet sind. Diese Tatsachen werden zunächst in dem folgenden Hilfssatz zusammengestellt, dessen elementare Herleitung übergangen werden kann.

Hilfssatz 2. *Die Funktionen $\overline{W}_1(x;c)$, $\overline{W}_2(x;c)$, $\underline{W}_1(x;c)$, $\underline{W}_2(x;c)$ seien durch die folgenden Differentialgleichungen und Anfangsbedingungen festgelegt*[12]*:*

$$\begin{cases} \overline{W}_i'' - (-1)^i p(x)\,\overline{W}_i' + q(x)\,\overline{W}_i = -r(x) \\ \underline{W}_i'' - (-1)^i p(x)\,\underline{W}_i' + q(x)\,\underline{W}_i = r(x) \\ \overline{W}_i(c;c) = \overline{C} > 0, \quad \overline{W}_i'(c;c) = 0 \\ \underline{W}_i(c;c) = \underline{C} < 0, \quad \underline{W}_i'(c;c) = 0, \quad (i = 1, 2). \end{cases} \tag{30}$$

Dann folgt aus (29a) *bei hinreichend großem $\overline{C}$ auch*

$$\overline{W}_1(x;c) > 0, \quad \overline{W}_1'(x;c) \geqq 0 \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq c \tag{31a}$$

und bei hinreichend großem $|\underline{C}|$ entsprechend

$$\underline{W}_1(x;c) < 0, \quad \underline{W}_1'(x;c) \leqq 0 \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq c; \tag{32a}$$

ebenso folgt aus (29b) *bei hinreichend großem $\overline{C}$*

$$\overline{W}_2(x;c) > 0, \quad \overline{W}_2'(x;c) \leqq 0 \quad \text{für} \quad c \leqq x \leqq b \tag{31b}$$

und bei hinreichend großem $|\underline{C}|$

$$\underline{W}_2(x;c) < 0, \quad \underline{W}_2'(x;c) \geqq 0 \quad \text{für} \quad c \leqq x \leqq b. \tag{32b}$$

Nun wird Satz 4 durch Zurückführung auf Satz 3 bewiesen. Nach Voraussetzung gibt es immer ein c, für das die Bedingungen (29a) und (29b) erfüllt sind; denn die unter β) und α) genannten Fälle ordnen sich dieser allgemeinen Aussage als Sonderfälle für $c = a$ und $c = b$ unter. Man wählt nun $\overline{C}$ so groß, daß (31a) und (31b) erfüllt sind, und setzt:

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} \overline{W}_1(x;c) & \text{für} \quad a \leqq x \leqq c \\ \overline{W}_2(x;c) & \text{für} \quad c \leqq x \leqq b. \end{cases} \tag{33}$$

Weiter nimmt man $|\underline{C}|$ so groß an, daß (32a) und (32b) erfüllt sind, und setzt:

$$\underline{y}(x) = \begin{cases} \underline{W}_1(x;c) & \text{für} \quad a \leqq x \leqq c \\ \underline{W}_2(x;c) & \text{für} \quad c \leqq x \leqq b. \end{cases} \tag{34}$$

[12]) Auch hier gilt die Bemerkung der Fußnote [11]).

Mit diesen beiden Funktionen wird darauf der Zylinderbereich $\mathfrak{Z}$ des Satzes 3 konstruiert. In ihm sind, da er ein Teilbereich von $\mathfrak{S}$ ist, für die Funktion f die Voraussetzungen A und B erfüllt. Das Zutreffen der Voraussetzung a) des Satzes 3 ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion.

Aus (33) und (34) folgt nun nach (30), (31a, b) und (32a, b) in Verbindung mit (28):

$$\bar{y}''(x) = -\{p(x)\cdot|\bar{y}'(x)| + q(x)\,|\bar{y}(x)| + r(x)\} \leqq f\big(x,\bar{y}(x),\bar{y}'(x)\big)$$

$$\underline{y}''(x) = p(x)\cdot|\underline{y}'(x)| + q(x)\cdot|\underline{y}(x)| + r(x) \geqq f\big(x,\underline{y}(x),\underline{y}'(x)\big)$$

(beides gültig fast überall in $\langle a, b\rangle$), und hieraus folgt durch Integration, daß die Funktionen $\underline{y}(x)$ und $\bar{y}(x)$ auch die in Voraussetzung b) des Satzes 3 geforderten Eigenschaften haben.

Ist nun $Y \geqq 1$ eine Konstante, die für $a \leqq x \leqq b$ weder von $\bar{y}(x)$ noch von $|\underline{y}(x)|$ übertroffen wird, so folgt aus (28) sofort:

$$f(x, y, y')\cdot \operatorname{sgn} y \geqq -\{p(x)\cdot|y'| + q(x)\,Y + r(x)\}$$

für $(x, y, y') \in \mathfrak{Z}$, und diese Abschätzung läßt sich weiter vergröbern zu

$$f(x, y, y')\cdot \operatorname{sgn} y \geqq -\{p(x) + q(x) + r(x)\}\,(|y'| + Y).$$

Man erkennt, daß dies ein Spezialfall von (12) ist, wenn man beispielsweise setzt:

$$\psi(y) \equiv 0, \quad \varphi(y') = 1 + y'^2,$$

$$\chi(x) = p(x) + q(x) + r(x), \quad \omega(y') = |y'| + Y.$$

Es bleibt dann noch zu zeigen, daß diese Funktionen die in Voraussetzung d) des Hilfssatzes 1 (§ 2) genannten Eigenschaften haben. Für $\psi(y)$ und $\chi(x)$ ist das unmittelbar klar. $\varphi(y')$ ist positiv und stetig und genügt den Forderungen (7); $\omega(y')$ ist ebenfalls positiv und stetig, und φ und ω zusammen erfüllen die Bedingung (8) mit

$$\varkappa = \frac{1 + \sqrt{1 + Y^2}}{2}.$$

Somit ist auch die Voraussetzung c) des Satzes 3 erfüllt.

Schließlich folgt für die Fälle $c = b$ bzw. $c = a$ aus (30), (33) und (34) sofort, daß die Zusatzvoraussetzung d_{II}) bzw. d_{III}) zutrifft.

Damit ist Satz 4 durch Zurückführung auf Satz 3 vollständig bewiesen.

Ist die in (28) auftretende Funktion $q(x) \equiv 0$ für $a \leqq x \leqq b$, so sind die unter α), β) und γ) genannten Bedingungen von selbst erfüllt. In diesem Falle liefert aber Satz 4 auch kein neues Existenzkriterium, sondern seine Aussagen sind in Satz 2 enthalten.

Die unter α), β) und γ) genannten Bedingungen schränken bei vorgegebenem Intervall $\langle a, b\rangle$ die Funktionenpaare $\{p(x), q(x)\}$ ein, die in (28) auftreten

dürfen. Der Sachverhalt läßt sich aber auch wie folgt deuten: Erfüllt $f(x, y, y')$ für $a' < x < b'$ und beliebige y und y' die Voraussetzungen A und B sowie die Bedingung (28) mit bestimmten nichtnegativen und integrablen Funktionen $p(x)$ und $q(x) \not\equiv 0$, so werden durch $\alpha)$, $\beta)$ und $\gamma)$ solche abgeschlossenen Teilintervalle $\langle a, b\rangle \subset (a', b')$ festgelegt, für die die vorliegenden Probleme lösbar sind. Die genannten Bedingungen erscheinen dann als Beschränkungen für das zugrunde zu legende Intervall.

Wenn an die Stelle der Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ zwei Konstanten $P \geqq 0$ und $Q > 0$ treten, lassen sich die in $\alpha)$, $\beta)$ und $\gamma)$ ausgesprochenen Bedingungen in die Gestalt von Ungleichungen bringen, durch die die Intervallänge $b - a$ mit den Werten P und Q verknüpft wird.

Für die Herleitung dieser Beziehungen werde mit $w(x)$ diejenige Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$w'' - P w' + Q w = 0$$

bezeichnet, die den Anfangsbedingungen

$$w(0) = 1, \quad w'(0) = 0$$

genügt. Dann hat man zu setzen:

$$w_1(x; c) = w(c - x), \quad w_2(x; c) = w(x - c).$$

Die Bedingungen in $\alpha)$ und $\beta)$ besagen dann, daß $w(x) > 0$ sein muß für $0 \leqq x \leqq b - a$, und die Bedingung von $\gamma)$ nimmt mit $c = \frac{a+b}{2}$ die Form $w(x) > 0$ für $0 \leqq x \leqq \frac{b-a}{2}$ an. Von entscheidender Bedeutung ist danach die erste positive Nullstelle von $w(x)$. Sie werde mit $D(P, Q)$ bezeichnet und läßt sich wie folgt explizit angeben:

$$D(P, Q) = \frac{2}{\sqrt{Q}} \cdot \Phi\left(\frac{P}{2\sqrt{Q}}\right), \tag{35}$$

mit

$$\begin{cases} \Phi(0) = \frac{\pi}{2} \\ \Phi(\lambda) = \frac{\arccos \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \quad \text{für} \quad 0 < \lambda < 1 \\ \Phi(1) = 1 \\ \Phi(\lambda) = \frac{\operatorname{arch} \lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \quad \text{für} \quad \lambda > 1. \end{cases} \tag{36}$$

Damit ist folgendes gezeigt:

Satz 5. *$f(x, y, y')$ genüge für $a \leqq x \leqq b$ und beliebige (reelle) y und y' den Voraussetzungen A und B aus § 1 und der Beschränkung*

$$f(x, y, y') \cdot \operatorname{sgn} y \geqq -\{P|y'| + Q|y| + r(x)\}, \tag{37}$$

in der $P \geqq 0$ und $Q > 0$ Konstanten sind und $r(x)$ eine nichtnegative, über $\langle a, b\rangle$ integrable Funktion bedeutet. Gilt darüber hinaus die Ungleichung

$$b - a < 2D(P, Q), \tag{38}$$

unter $D(P, Q)$ die durch (35) und (36) definierte Größe verstanden, so besitzt Problem I mindestens eine Lösung. Die Probleme II und III sind stets lösbar, wenn

$$b - a < D(P, Q) \tag{39}$$

ist.

Die Sätze 4 und 5 sind mit denjenigen bekannten Existenzsätzen vergleichbar, deren Hauptbedingung eine Beschränkung der allgemeinen Gestalt

$$|f(x, y, y')| \leq p(x)|y'| + q(x)|y| + r(x)$$

oder

$$|f(x, y, y')| \leq P|y'| + Q|y| + r(x)$$

ist, die durch zusätzliche Vorschriften über die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ oder die Konstanten P und Q ergänzt wird[13]). Die Sätze 4 und 5 sind allgemeiner als alle bisherigen Ergebnisse dieser Art; denn erstens tritt hier an die Stelle der genannten absoluten Beschränkung die einseitige Beschränkung (28) bzw. (37), und zweitens gilt die folgende

Bemerkung. Die Aussagen der Sätze 4 und 5 lassen sich nicht mehr dadurch verallgemeinern, daß man die unter $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$ genannten Bedingungen des Satzes 4 oder die Bedingungen (38) und (39) des Satzes 5 durch schwächere Forderungen ersetzt.

Das liegt an der Tatsache, daß die zum Vergleich herangezogenen linearen Differentialgleichungen selbst unter die Beschränkung (28) bzw. (37) fallen. Es genügt, dies für Satz 4 und Problem I näher auszuführen, also zu zeigen:

Haben die nichtnegativen, über $\langle a, b\rangle$ integrablen Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ die Eigenschaft, daß Problem I für jedes $f(x, y, y')$ lösbar ist, das in $\mathfrak{S}$ die Voraussetzungen A und B erfüllt und der Beschränkung (28) mit irgendeinem nichtnegativen, über $\langle a, b\rangle$ integrablen $r(x)$ genügt, so erfüllen diese beiden Funktionen auf jeden Fall die in Satz 4 unter $\gamma)$ genannte Bedingung.

Beweis. Nach Voraussetzung muß eine Funktion $\eta(x)$ existieren, die fast überall in $\langle a, b\rangle$ die Differentialgleichung

$$\eta'' = -\{p(x) \cdot |\eta'| + q(x) \cdot (|\eta| + 1)\}$$

erfüllt und den Randbedingungen $\eta(a) = \eta(b) = 0$ genügt. Die erste Ableitung $\eta'(x)$ dieser Funktion ist sicher eine im ganzen Intervall nichtzunehmende Funktion von x, und es gibt (mindestens) eine Abszisse c im Inneren von

[13]) Beispielsweise A. HAMMERSTEIN [6], S. CINQUINI [2], [4]. In diesem Zusammenhang sind auch die Sätze von E. PICARD [10] und F. LETTENMEYER [7] zu erwähnen, soweit sie die Existenz der Lösungen betreffen.

(a, b), für die $\eta'(c) = 0$ wird. Dann ist:

$$\eta'(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq c,$$

$$\eta'(x) \leqq 0 \quad \text{für} \quad c \leqq x \leqq b$$

und

$$\eta(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b.$$

Die obige Differentialgleichung kann danach auch durch die folgende ersetzt werden:

$$\eta'' = -\{p(x) \cdot |\eta'| + q(x)(\eta + 1)\},$$

die für $a \leqq x \leqq c$ bzw. $c \leqq x \leqq b$ in die für die Funktion $\eta(x) + 1$ hingeschriebene Differentialgleichung (26a) bzw. (26b) übergeht. Daher wird:

$$\frac{\eta(x) + 1}{\eta(c) + 1} = \begin{cases} w_1(x; c) & \text{für} \quad a \leqq x \leqq c \\ w_2(x; c) & \text{für} \quad c \leqq x \leqq b. \end{cases}$$

und man sieht, daß (29a) und (29b) erfüllt sind. Die aufgestellte Behauptung ist damit bewiesen.

Es läßt sich entsprechend auch für alle übrigen Fälle beweisen, daß die obige Bemerkung richtig ist.

Abschließend sei schon hier bemerkt, daß die eingeführten Hilfsfunktionen $w_1(x; c)$ und $w_2(x; c)$ in den Kriterien der Eindeutigkeit eine ähnliche Rolle spielen wie in denen der Existenz. Durch Vereinigung der Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen entstehen dann Sätze über das Vorhandensein genau einer Lösung, die sehr einfach gebaut sind und über alle bisher bekannten derartigen Sätze hinausgehen.

Literatur.

[1] Carathéodory, C.: Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig 1918. — [2] Cinquini, S.: Problemi di valori al contorno ... Ann. R. Scuola norm. sup. Pisa, Sc. fis. e mat. (2) **8**, 1—22 (1939). — [3] Cinquini, S.: Sopra i problemi di valori al contorno ... Ann. R. Scuola norm. sup. Pisa, Sc. fis. e mat. (2), **8**, 271—283 (1939). — [4] Cinquini, S.: Problemi di valori al contorno ... Ann. R. Scuola norm. sup. Pisa, Sc. fis. e mat. (2) **9**, 61—77 (1940). — [5] Cinquini, S.: Un osservazione sopra i problemi... Bolletino Un. Mat. Ital. (2) **2**, 322—325 (1940). — [6] Hammerstein, A.: Die erste Randwertaufgabe für nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. **30**, 3—10 (1932). — [7] Lettenmeyer, F.: Über die von einem Punkt ausgehenden Integralkurven einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Deutsche Mathematik **7**, 56—74 (1943). — [8] Magenes, E.: Sopra un problema di T. Satô ... Atti Accad. Naz. Linc., Rend. cl. sc. fis., mat. e nat. (8) **2**, 130—136 (1947). — [9] Nagumo, M.: Über die Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$. Proc. Phys.-Math. Soc. Japan (3) **19**, 861—866 (1937). — [10] Picard, E.: Lecons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles, S. 2—7. Paris 1930. — [11] Satô, T.: Sur l'équation différentielle $y'' = f(x, y, y')$. Proc. Imp. Acad. Japan **13**, 348—350 (1937). — [12] Scorza-Dragoni, G.: Il problema dei valori ai limiti studiato in grande ... Giorn. di Mat. di Battaglini (3) **69**, 77—112 (1931). — [13] Scorza-Dragoni, G.: Il problema

dei valori ai limiti studiato in grande ... Math. Ann. **105**, 133—148 (1931). — [*14*] SCORZA-DRAGONI, G.: A proposito di alcuni teoremi relativi ad un problema ai limiti ... Atti. R. Accad. Naz. Linc., Rend. cl. sc. fis., mat. e nat. (6) **22**, 44—48 (1935). — [*15*] SCORZA-DRAGONI, G.: Su un problema di valori ai limiti ... Rend. Sem. Mat. R. Univ. Roma (4) **2**, 177—215 (1938). — [*16*] SCORZA-DRAGONI, G.: Elementi uniti di trasformazioni funzionali e problemi di valori ai limiti. Rend. Sem. Mat. R. Univ. Roma (4) **2**, 255—275 (1938). — [*17*] SCORZA-DRAGONI, G.: Intorno a un criterio di esistenza per un problema di valori ai limiti. Atti R. Accad. Naz. Linc., Rend. cl. sc. fis., mat. e nat. (6) **28**, 317—325 (1938). — [*18*] SCORZA-DRAGONI, G.: A proposito di un teorema sulle equazioni differenziali ordinarie. Rend. Sem. Mat. R. Univ. Padova **10**, 90—100 (1939). — [*19*] TONELLI, L.: Sull equazione differenziale $y'' = f(x, y, y')$. Ann. R. Scuola Norm Sup. Pisa, sc. fis. e mat. (2) **8**, 75—88 (1939). — [*20*] ZWIRNER, G.: Su un problema di valori al contorno ... Rend. Sem. Mat. R. Univ. Roma (4) **3**, 57—70 (1939). — [*21*] ZWIRNER, G.: Un' osservazione su un problema ai limiti ... Bolletino Un. Mat. Ital. (2) **1**, 334—336 (1939). — [*22*] ZWIRNER, G.: Un criterio di esistenza per un problema di valori al contorno ... Rend. Sem. Mat. R. Univ. Padova **10**, 55—64 (1939). — [*23*] ZWIRNER, G.: Sopra un teorema sulle equazioni differenziali del secondo ordine. Rend. Sem. Mat. R. Univ. Padova **10**, 65—68 (1939).

Hannover, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen am 23. August 1954.)

Koecher, M.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 455—466 (1955)

Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. II.

Von
Max Koecher.

§ 1. Einleitung und Ergebnisse.

1. Die vorliegende Note ist als Fortsetzung einer gleichnamigen Arbeit des Verfassers[1]) anzusehen. Während in der zitierten Arbeit im wesentlichen gezeigt wurde, daß eine Abschwächung der definierenden Eigenschaften der Modulformen n-ten Grades keine echte Verallgemeinerung zur Folge hat, und diese Überlegungen für allgemeine Kongruenzuntergruppen der symplektischen Gruppe Σ_n ausgeführt wurden, soll jetzt eine Übertragung der durch Maass [*1*][2]) verallgemeinerten Peterssonschen Metrisierung auf diese Kongruenzgruppen vorgenommen werden. Dazu ist es im besonderen notwendig, eine handlichere Definition einer Spitzenform als die bei Siegel und Maass auftretenden zu entwickeln.

Im Hinblick auf eine demnächst erscheinende Verallgemeinerung der Heckeschen Operatorentheorie war es zweckmäßig, eine systematische Theorie der Metrisierung der zu Kongruenzuntergruppen gehörigen Modulformen n-ten Grades zu geben. Da verschiedene von Maass aufgestellte Behauptungen in allgemeinerer Form neu bewiesen werden, darf vielleicht die vorliegende Note auch an sich Interesse beanspruchen.

In der Bezeichnungsweise wird sich streng an MF I — insbesondere § 2 — gehalten. Es wird stets die Gültigkeit der Voraussetzung (V) von MF I, S. 403, angenommen und $-k>0$ vorausgesetzt[3]).

2. Wie schon erwähnt, ist über die in MF I gegebenen Bezeichnungen hinaus der Begriff einer *Spitzenform* wichtig. Im Anschluß an die Untersuchungen von Siegel [*2*] und Maass [*1*] benutzt man zur Definition zweckmäßig einen Operator Φ, der zuerst erklärt werden soll. Ist $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}'=\mathfrak{X}+i\mathfrak{Y}$ eine Matrix aus dem Halbraum H_n, dann sei $\mathfrak{Z}_1$ diejenige $(n-1)$-reihige Matrix, die aus $\mathfrak{Z}$ durch Streichen der letzten Zeile und Spalte entsteht, also

$$\mathfrak{Z}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Z}_1 & * \\ * & *\end{pmatrix},$$

[1]) Zur Theorie der Modulformen n-ten Grades. I, Math. Z. **59**, 399—416 (1954), im folgenden abgekürzt mit MF I.

[2]) Die in eckigen Klammern angebrachten Literaturhinweise beziehen sich auf das Verzeichnis in MF I.

[3]) Vgl. MF I, Satz 3b, 3c.

wobei dann notwendig $\operatorname{Im} \mathfrak{Z}_1 > 0$ gilt. Für jede stetige Funktion $f(\mathfrak{Z})$ auf H_n wird jetzt Φ durch

$$f(\mathfrak{Z})/\Phi = \lim_{y \to \infty} f\begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_1 & 0 \\ 0 & iy \end{pmatrix}$$

definiert, sofern dieser Limes existiert. f/Φ ist dann eine Funktion auf H_{n-1}.

Man kann sich unter Verwendung von Satz 2a aus MF I ohne Schwierigkeiten überlegen, daß für Formen $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ der Operator Φ allgemeiner definiert werden kann. Sei nämlich $\mathfrak{Z}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine im Fundamentalbereich der Modulgruppe n-ten Grades nach Unendlich strebende Folge[4]), bei der aber alle durch Streichen der letzten Zeile und Spalte entstehenden Matrizen identisch sind, dann gilt stets

$$\lim_{\nu \to \infty} f(\mathfrak{Z}_\nu) = f/\Phi.$$

Man wird nun zuerst untersuchen, welche Wirkung der Operator Φ auf eine Form aus $\{K, k, v\}$ ausübt. Es gilt:

Satz 1. *Ist $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ und $\mathfrak{R}$ rational aus Σ_n gegeben, dann gilt:*

a) In der Reihenentwicklung von $f/\mathfrak{R}$ nach Satz 2a von MF I darf Φ gliedweise ausgeführt werden.

b) Es gibt eine eindeutig bestimmte Kongruenzgruppe $K_{\mathfrak{R}}$ in Σ_{n-1} und ein Multiplikatorsystem $v_{\mathfrak{R}}$ mit

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}/\Phi \in \{K_{\mathfrak{R}}, k, v_{\mathfrak{R}}\}.$$
$$(k)$$

Ist K von der Stufe q, dann ist $K_{\mathfrak{R}}$ von der Stufe $q \cdot g^2(\mathfrak{R})$.

Ist K eine Kongruenzuntergruppe von Σ_n von endlicher Stufe, dann heißt eine Form $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ eine *Spitzenform*, wenn für *alle* rationalen $\mathfrak{R}$ aus Σ_n

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}/\Phi = 0$$
$$(k)$$

erfüllt ist[5]). Diese Definition unterscheidet sich wenigstens formal — von der bisher üblichen Definition einer Spitzenform. Man wird aber sehen, daß beide Definitionen im Falle der Modulgruppe n-ten Grades M_n gleichbedeutend sind. Die hier eingeführte Formulierung ist wegen ihrer „invarianten" — nicht von der zugehörigen Gruppe K abhängigen — Schreibweise vorzuziehen. Außerdem wird der Begriff der „Spitze eines Fundamentalbereiches", der ja für $n > 1$ bei Gruppen, die nicht Untergruppen der Modulgruppe sind, noch wenig geklärt ist, umgangen.

Die Definition der Spitzenform enthält unendlich viele Bedingungen, die sich jedoch auf nur endlich viele reduzieren lassen.

[4]) Das heißt wenigstens ein Element strebt nach Unendlich.

[5]) Man kann sich leicht überlegen, daß für $n = 1$ diese Definition inhaltlich mit der dort üblichen Definition übereinstimmt.

Satz 2. *Eine Form $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ ist unter der Voraussetzung (V) genau dann Spitzenform, wenn*

$$\underset{(k)}{f/\mathfrak{M}/\Phi} = 0$$

für alle $\mathfrak{M}$ aus M_n erfüllt ist[6]).

Da K und M_n kommensurabel sind, ist jetzt sichergestellt, daß an eine Spitzenform nur endlich viele Bedingungen gestellt sind. Außerdem ersieht man aus diesem Satz die behauptete Äquivalenz der beiden Definitionen von Spitzenformen im Falle $K = M_n$, $v = 1$.

3. In Satz 2a von MF I war gezeigt worden, daß für jedes f aus $\{K, k, v\}$ und jedes rationale $\mathfrak{R}$ aus Σ_n die Funktion $f/\mathfrak{R}$ eine Fourierentwicklung nach

$$e^{\frac{2\pi i}{Q}\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{H})}, \qquad Q = q \cdot g^2(\mathfrak{R}), \qquad q \text{ Stufe von } K,$$

besitzt, bei der nur Glieder mit $\mathfrak{T} \geqq 0$ auftreten. Eine Verschärfung dieses Satzes kann man für Spitzenformen beweisen:

Satz 3. *Eine Form $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ ist unter der Voraussetzung (V) genau dann Spitzenform, wenn für jedes rationale $\mathfrak{R}$ aus Σ_n*

$$\underset{(k)}{f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}} = \sum_{\mathfrak{T} > 0} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e^{\frac{2\pi i}{Q}\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{H})}, \qquad Q = q \cdot g^2(\mathfrak{R}),$$

erfüllt ist. Die Summation ist nur über die symmetrischen halbganzen positiven Matrizen $\mathfrak{T}^{(n)}$ zu erstrecken.

Eine relativ einfache Folgerung aus Satz 3 ist

Satz 4. *Eine Form $f(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$ ist unter der Voraussetzung (V) genau dann Spitzenform, wenn für jedes rationales $\mathfrak{R}$ aus Σ_n*

$$\left|\underset{(k)}{f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}}\right| \leqq c_1 e^{\,c_2 \sigma(\mathfrak{Y})}$$

für reduziertes $\mathfrak{Y} = \operatorname{Im} \mathfrak{Z} \geqq c\,\mathfrak{E}$ $(c > 0)$ mit von $\mathfrak{Z}$ unabhängigen positiven Konstanten c_1, c_2 gilt.

Während man bei der Definition der Spitzenform ein Verschwinden der Funktion bei gewissen speziellen Annäherungen an den Rand von H_n fordert,

[6]) Es ist bemerkenswert, daß man diesen Satz an Stelle von M_n für jede Gruppe $N \subseteq \Sigma_n$ beweisen kann, die folgende Eigenschaften besitzt:

a) N ist in H_n diskontinuierlich und besteht nur aus rationalen Matrizen von beschränktem Nenner.

b) Es existiert ein Fundamentalbereich $F(N)$ von N derart, daß aus $\mathfrak{Z} \in F(N)$ stets

$$\operatorname{Im} \mathfrak{Z} \geqq c\,\mathfrak{E} \qquad (c = c(N) > 0)$$

folgt.

c) Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{U}' & 0 \\ 0 & \mathfrak{U}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{U} \text{ aus } \Omega_n,$$

liegen in N.

Der Beweis des Satzes wird für Gruppen dieser Art ausgeführt.

erkennt man jetzt durch Satz 4, daß dann schon die Funktion $f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{N}$ gegen Null geht, wenn $\mathfrak{Z}$ irgendwie unter der Nebenbedingung $\mathfrak{Y} \geqq c\,\mathfrak{E}$, $\mathfrak{Y}$ reduziert, gegen Unendlich strebt.

4. Wird für eine reelle symmetrische Matrix $\mathfrak{X} = (x_{kl})$ das euklidische Volumenelement durch

$$d\mathfrak{X} = \prod_{k \geq l} dx_{kl}$$

definiert, dann ist

$$dv = \frac{d\mathfrak{X}\, d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}}$$

nach [4], III das bei den Abbildungen

$$\mathfrak{Z} \to \mathfrak{M}\langle\mathfrak{Z}\rangle, \quad \mathfrak{M} \in \Sigma_n, \quad \mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + i\,\mathfrak{Y},$$

invariante Volumenelement.

Für jede diskontinuierliche Untergruppe K von Σ_n wird ein Fundamentalbereich stets mit $F(K)$ abgekürzt. Ist K_0 eine Untergruppe von K mit endlichem Index, dann hat man nach bekannten Schlußweisen

$$F(K_0) = \bigcup_{\mathfrak{M} \in K,\, \mathfrak{M} \backslash K_0} \mathfrak{M}\langle F(K)\rangle, \tag{1.1}$$

wobei für jede Punktmenge A von H_n das Bild bei der Abbildung

$$\mathfrak{Z} \to \mathfrak{M}\langle\mathfrak{Z}\rangle, \quad \mathfrak{M} \text{ aus } \Sigma_n$$

mit $\mathfrak{M}\langle A\rangle$ bezeichnet wird. Kürzt man außerdem mit $V(K)$ das symplektische Volumen des Fundamentalbereiches $F(K)$ ab, d. h.

$$V(K) = \int_{F(K)} dv = \int_{F(K)} \frac{d\mathfrak{X}\, d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}},$$

dann ist $V(K)$ von der Auswahl des Fundamentalbereiches unabhängig und hat für Kongruenzgruppen K einen endlichen Wert, da $V(M_n)$ nach [4], III endlich ist. Ohne Schwierigkeit überlegt man sich, daß

$$V(K_0) = [K : K_0]\, V(K) \tag{1.2}$$

und für symplektisches $\mathfrak{N}$ außerdem

$$V(\mathfrak{N} \cdot K \cdot \mathfrak{N}^{-1}) = V(K) \tag{1.3}$$

richtig ist.

5. Analog der Definition von MAASS [1] werde für zwei Formen $f(\mathfrak{Z})$ und $g(\mathfrak{Z})$ aus $\{K, k, v\}$, von denen wenigstens eine Spitzenform ist, ein *Skalarprodukt* (f, g) durch

$$(f, g) = \frac{1}{V(K)} \int_{F(K)} f(\mathfrak{Z})\, \overline{g(\mathfrak{Z})}\, |\mathfrak{Y}|^{-k}\, \frac{d\mathfrak{X}\, d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}} \tag{1.4}$$

definiert. Wie in 4. überlegt man sich auch hier, daß (f, g) nicht von der Auswahl des Fundamentalbereiches $F(K)$ abhängt. Die hier im Gegensatz zu PETERSSON und MAASS gewählte Normierung des Skalarproduktes gestattet bei späteren Anwendungen verschiedene formale Vereinfachungen, denn (1.4) hängt, wie man sehen wird, nicht mehr von der Gruppe K ab.

Satz 5. *Unter der Voraussetzung* (V) *gilt:*

a) (f, g) *konvergiert absolut, sobald* f *und* g *in* $\{K, k, v\}$ *liegen und* f *oder* g *Spitzenform ist.*

b) (f, g) *ist durch* f *und* g *eindeutig bestimmt, d.h. das Skalarprodukt hängt nicht von* K *ab.*

c) $(f, g) = \overline{(g, f)}$, $(f, f) \geq 0$, $(f, f) = 0$ *genau wenn* $f = 0$.

d) $(f/\mathfrak{R}, g/\mathfrak{R}) = (f, g)$ *für jedes rationale* $\mathfrak{R}$ *aus* Σ_n.

Für $K = M_n$ stammt dieser Satz von MAASS [1]. Der Beweis wird hier mit Hilfe von Satz 4 geführt.

Satz 5 zeigt, daß durch die Erklärung des Skalarproduktes (f, g) die Teilschar der Spitzenformen aus $\{K, k, v\}$ zu einem *metrischen Raum* mit positiv definiter hermitescher Metrik wird. Die Theorie der metrischen Räume liefert sofort:

Satz 6. *Unter der Voraussetzung* (V) *gibt es in der Teilschar der Spitzenformen von* $\{K, k, v\}$ *eine Basis* $f_1, f_2, \ldots, f_\varrho$ *mit* $(f_k, f_l) = \delta_{kl}$.

Bei diesem Satz muß natürlich vorausgesetzt werden, daß es überhaupt eine nicht identisch verschwindende Spitzenform der betrachteten Schar gibt. Da aber jede Spitzenform f aus $\{M_n, k, 1\}$ gleichzeitig Spitzenform in $\{M_n[q], k, 1\}$ ist, stellt für beliebige Kongruenzgruppe K der Stufe q die durch

$$g = \prod_{\substack{\mathfrak{M} \in K \\ \mathfrak{M} \backslash M_n[q]}} f/\mathfrak{M}^{(k)}$$

definierte Funktion eine nicht verschwindende Spitzenform aus $\{K, mk, 1\}$ dar, wobei der Index von $M_n[q]$ in K mit m abgekürzt ist.

§ 2. Beweis der Sätze 1 bis 5.

Wie in MF I wird wieder

$$e_q(\mathfrak{W}) = e^{\frac{2\pi i}{q}\sigma(\mathfrak{W})}$$

für jedes natürliche q abgekürzt.

1. *Beweis von Satz 1.* a) Es genügt zu beweisen, daß die Fourierreihe für $f/\mathfrak{R}$ bei

$$\mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_1 & 0 \\ 0 & iy \end{pmatrix}$$

für alle $\mathfrak{Z}_1$ aus einem kompakten, ganz in H_{n-1} liegenden Gebiet G und alle $y \geqq y_1$ gleichmäßig in $\mathfrak{Z}_1$ und y konvergiert. Es gibt dazu $c > 0$ derart, daß für alle $\mathfrak{Z}_1$ aus G

$$\operatorname{Im} \mathfrak{Z}_1 \geqq 2c\,\mathfrak{E}$$

erfüllt ist. Bei $y \geqq 2c$ ist dann $\operatorname{Im} \mathfrak{Z} \geqq 2c\,\mathfrak{E}$ und man hat für den Betrag des allgemeinen Gliedes von $f/\mathfrak{R}$

$$|a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(\mathfrak{T}\,\mathfrak{Z})| = |a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(\mathfrak{T}(\mathfrak{Z} - c\,\mathfrak{E}))| \cdot |e_Q(c\,\mathfrak{T})| \leqq |a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(c\,\mathfrak{T})|,$$

so daß die Betragsreihe von $f(i\,c\,\mathfrak{E})/\mathfrak{R}$ eine von y und $\mathfrak{Z}_1$ unabhängige Majorante von $f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}$ ist. $f/\mathfrak{R}/\Phi$ existiert also und darf gliedweise ausgeführt werden

b) In dem Beweis zu Satz 1 a war schon mitbewiesen worden, daß $f/\mathfrak{R}/\Phi$ eine reguläre analytische Funktion auf H_{n-1} ist. Es muß also nur noch die Transformationsformel für $g = f/\mathfrak{R}$ nachgewiesen werden. Dazu liegt zuerst g in $\{\mathfrak{R}^{-1} \cdot K \cdot \mathfrak{R},\ k,\ \bar{v}\}$, wobei für $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{R}^{-1} \cdot K \cdot \mathfrak{R}$ der Multiplikator $\bar{v}$ durch

$$\bar{v}(\mathfrak{M}) = v(\mathfrak{R}\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}^{-1})$$

definiert ist. Jetzt sei $K_{\mathfrak{R}}$ die Gruppe der Matrizen

$$\mathfrak{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{D}_1 \end{pmatrix} \quad \text{aus} \quad \Sigma_{n-1},$$

für die

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 & 0 & \mathfrak{B}_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathfrak{C}_1 & 0 & \mathfrak{D}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathfrak{R}^{-1} \cdot K \cdot \mathfrak{R}$ liegt. Für $\mathfrak{M}_1$ aus $K_{\mathfrak{R}}$ ist

$$v_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}_1) = \bar{v}(\mathfrak{M})$$

ein Multiplikatorsystem von $K_{\mathfrak{R}}$ und es folgt

$$\begin{aligned} g/\Phi/\mathfrak{M}_1 &= \lim_{y \to \infty} g \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1\langle \mathfrak{Z}_1 \rangle & 0 \\ 0 & i\,y \end{pmatrix} |\mathfrak{M}_1\{\mathfrak{Z}_1\}|^k \\ &= \lim_{y \to \infty} g(\mathfrak{M}\langle \mathfrak{Z} \rangle)\, |\mathfrak{M}\{\mathfrak{Z}\}|^k = g/\mathfrak{M}/\Phi, \quad \mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_1 & 0 \\ 0 & i\,y \end{pmatrix}, \\ &= v_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{M}_1)\, g/\Phi, \end{aligned}$$

so daß Satz 1 vollständig bewiesen ist, denn $\mathfrak{R}^{-1} \cdot K \cdot \mathfrak{R}$ und $K_{\mathfrak{R}}$ sind von gleicher Stufe.

2. *Beweis von Satz 2.* Da der Beweis in der allgemeinen Form für die Gruppen N, die [6]) genügen, geführt werden soll, muß zuerst ein Hilfssatz bewiesen werden, der auch für sich allein interessant ist.

Hilfssatz 1. *Ist N eine Gruppe, die den Forderungen a) und b) von* [6]) *genügt, dann gibt es zu jedem rationalen $\mathfrak{R}$ aus Σ_n ein $\mathfrak{M}$ aus N mit*

$$\mathfrak{M}\,\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}' & \mathfrak{S}\,\mathfrak{A}^{-1} \\ 0 & \mathfrak{A}^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}'.$$

Beweis. Sei die natürliche Zahl ϱ so beschaffen, daß für alle $\mathfrak{M}$ aus N die Matrix $\varrho \cdot \mathfrak{M}$ ganz ist und

$$\mathfrak{Z} = i\,y\,\mathfrak{E}, \qquad y > \frac{\varrho^2 g^2(\mathfrak{R})}{c(N)},$$

dann gibt es nach Forderung b) ein $\mathfrak{M}$ aus N mit

$$\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}\langle\mathfrak{Z}\rangle \in F(N), \quad \text{d.h.} \quad \operatorname{Im}\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}\langle\mathfrak{Z}\rangle \geq c(N)\,\mathfrak{E}.$$

Bei

$$\mathfrak{M}\,\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{pmatrix}$$

folgt nach MF I (2.2)

$$y\,\mathfrak{E} \geq c(N)\,(\mathfrak{C}\,\mathfrak{Z} + \mathfrak{D})'\,(\mathfrak{C}\,\overline{\mathfrak{Z}} + \mathfrak{D}). \tag{2.1}$$

Sei jetzt $r = r(\mathfrak{C})$ der Rang von $\mathfrak{C}$ und $r > 0$, dann gibt es nach dem Elementarteilersatz Matrizen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ aus Ω_n mit

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{U}\begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathfrak{V}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{U}\begin{pmatrix} \mathfrak{D}_1 & \mathfrak{D}_2 \\ \mathfrak{D}_3 & \mathfrak{D}_4 \end{pmatrix}\mathfrak{V}'^{-1}, \quad |\mathfrak{C}_1^{(r)}| \neq 0,$$

denn $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ sind rational. Aus $\mathfrak{M}\,\mathfrak{R} \in \Sigma_n$ folgt $\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}\,\mathfrak{C}'$, was selbst wiederum $\mathfrak{D}_3 = 0$ nach sich zieht. Setzt man noch

$$\mathfrak{V}' = (\mathfrak{Q}^{(n,r)}\,*), \qquad \mathfrak{U} = (\mathfrak{P}^{(n,r)}\,*),$$

dann folgt aus (2.1)

$$y\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}' \geq c(N)\begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1 \cdot \mathfrak{Z}[\mathfrak{Q}] + \mathfrak{D}_1 & * \\ 0 & \mathfrak{D}_4 \end{pmatrix}' \mathfrak{U}'\,\mathfrak{U}\begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1 \cdot \overline{\mathfrak{Z}}[\mathfrak{Q}] + \mathfrak{D}_1 & * \\ 0 & \mathfrak{D}_4 \end{pmatrix}.$$

Da diese Ungleichung erhalten bleibt, wenn man auf beiden Seiten die letzten $n-r$ Zeilen und Spalten streicht, wird

$$y\,\mathfrak{Q}'\,\mathfrak{Q} \geq c(N)\,(\mathfrak{Z}[\mathfrak{Q}] + \mathfrak{C}_1^{-1}\mathfrak{D}_1)'\,\mathfrak{C}_1'\,\mathfrak{P}'\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{C}_1(\overline{\mathfrak{Z}}[\mathfrak{Q}] + \mathfrak{C}_1^{-1}\mathfrak{D}_1)$$

und Übergang zu den Determinanten liefert

$$\begin{aligned} y^r|\mathfrak{Q}'\,\mathfrak{Q}| &\geq (c(N))^r\,|\mathfrak{C}_1|^2 \cdot |\mathfrak{P}'\,\mathfrak{P}| \cdot ||\mathfrak{Z}[\mathfrak{Q}] + \mathfrak{C}_1^{-1}\mathfrak{D}_1||^2 \\ &\geq (c(N))^r\,|\mathfrak{C}_1|^2 \cdot |\mathfrak{Q}'\,\mathfrak{Q}|^2\,y^{2r} \\ &\geq (c(N) \cdot y^2)^r\,|\mathfrak{C}_1|^2 \cdot |\mathfrak{Q}'\,\mathfrak{Q}| \\ &> y^r|\varrho\,g(\mathfrak{R})\,\mathfrak{C}_1|^2\,|\mathfrak{Q}'\,\mathfrak{Q}|. \end{aligned}$$

Das ist aber für $r > 0$ ein Widerspruch, denn $\varrho \cdot g(\mathfrak{R}) \cdot \mathfrak{C}_1$ ist ganz und hat daher als Determinante mindestens 1. Es muß also $r(\mathfrak{C}) = 0$, d.h. $\mathfrak{C} = 0$ gelten und der Hilfssatz ist bewiesen.

Der Hilfssatz gilt insbesondere für $N=M_n$, jedoch kann er in diesem Falle aus einem arithmetischen Hilfssatz von SIEGEL gefolgert werden.

Zum Beweis von Satz 2 bestimmt man nun zu gegebenem rationalem $\mathfrak{R}$ aus Σ_n die Matrix $\mathfrak{M}$ aus N nach Hilfssatz 1. Wegen Forderung c) von [6]) kann man noch

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}\mathfrak{A}_1 & \mathfrak{a}\\ 0 & a\end{pmatrix}, \qquad a\cdot|\mathfrak{A}_1|\neq 0,$$

annehmen. Man setzt jetzt

$$\mathfrak{M}\,\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_0, \qquad g(\mathfrak{Z})=f(\mathfrak{Z})/\underset{(k)}{\mathfrak{M}^{-1}}.$$

Wenn nun

$$g/\mathfrak{R}_0/\Phi=\gamma\cdot g/\Phi/\mathfrak{R}_1 \tag{2.2}$$

mit geeignetem $\mathfrak{R}_1$ aus Σ_{n-1} und konstantem, von Null verschiedenen γ bewiesen werden kann, dann ist $f/\mathfrak{R}/\Phi=0$ schon erfüllt, wenn $f/\mathfrak{M}^{-1}/\Phi=0$ richtig ist. Zum Beweis des Satzes muß also nur noch (2.2) gezeigt werden. Man hat dazu bei

$$\mathfrak{Z}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Z}_1 & 0\\ 0 & iy\end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{Xi}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Xi}_1 & \mathfrak{i}\\ \mathfrak{j}' & s\end{pmatrix},$$

sofort

$$g(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}_0=|\mathfrak{A}|^{-k}\,g(\mathfrak{R}_0\langle\mathfrak{Z}\rangle),$$

$$\mathfrak{R}_0\langle\mathfrak{Z}\rangle=\mathfrak{A}'\,\mathfrak{Z}\,\mathfrak{A}+\mathfrak{Xi}=\begin{pmatrix}\mathfrak{R}_1\langle\mathfrak{Z}_1\rangle & \mathfrak{x}\\ \mathfrak{x}' & iya^2+x\end{pmatrix}$$

mit $\mathfrak{R}_1\langle\mathfrak{Z}_1\rangle=\mathfrak{A}_1'\,\mathfrak{Z}_1\,\mathfrak{A}_1+\mathfrak{Xi}_1$, $\mathfrak{x}=\mathfrak{A}_1\mathfrak{Z}_1\mathfrak{a}+\mathfrak{i}$, $x=\mathfrak{a}'\mathfrak{Z}_1\mathfrak{a}+s$. Mit Satz 1a hat man sodann

$$\begin{aligned} g(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}_0/\Phi&=\lim_{y\to\infty}|\mathfrak{A}|^{-k}\,g(\mathfrak{R}_0\langle\mathfrak{Z}\rangle)\\ &=\lim_{y\to\infty}|\mathfrak{A}|^{-k}\sum_{\mathfrak{T}\geq 0}a(\mathfrak{T},\,\mathfrak{M}^{-1})\,e_Q(\mathfrak{T}_1\cdot\mathfrak{R}_1\langle\mathfrak{Z}_1\rangle+2\mathfrak{t}'\mathfrak{x})\,e^{-\frac{2\pi y a^2 t}{Q}}\end{aligned}$$

mit $Q=q\cdot g^2(\mathfrak{M}^{-1})$, wobei noch in jedem Reihenglied

$$\mathfrak{T}=\begin{pmatrix}\mathfrak{T}_1 & \mathfrak{t}\\ \mathfrak{t}' & t\end{pmatrix}$$

gesetzt ist. Man hat also

$$g(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}_0/\Phi=|\mathfrak{A}|^{-k}\sum_{\substack{\mathfrak{T}\geq 0\\ t=0}}a(\mathfrak{T},\,\mathfrak{M}^{-1})\,e_Q(\mathfrak{T}_1\cdot\mathfrak{R}_1\langle\mathfrak{Z}_1\rangle)=a^{-k}\,g(\mathfrak{Z})/\Phi/\mathfrak{R}_1,$$

und (2.2) ist bewiesen.

3. *Beweis von Satz 3.* Es wird zuerst bewiesen werden, daß aus $f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}/\Phi=0$ für alle rationalen $\mathfrak{R}$ aus Σ_n die spezielle Entwicklung nach Satz 3 folgt. Nach Satz 2a in MF I hat man sicher

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}=\sum_{\mathfrak{T}\geq 0}a(\mathfrak{T},\,\mathfrak{R})\,e_Q(\mathfrak{T}\,\mathfrak{Z}), \qquad Q=q\cdot g^2(\mathfrak{R}).$$

Aus der Definition der Spitzenform folgt nun, daß bei festem $\mathfrak{R}$ auch die Funktion $f/\mathfrak{R}$ selbst Spitzenform ist, d.h. daß

$$(f/\mathfrak{R})/\mathfrak{K}/\Phi = f/\mathfrak{R}\,\mathfrak{K}/\Phi = 0$$

für jedes rationale $\mathfrak{K}$ aus Σ_n gilt. Wählt man

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U} & 0 \\ 0 & \mathfrak{U}'^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{U} \text{ aus } \Omega_n,$$

so wird

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}\,\mathfrak{K} = |\mathfrak{U}|^{-k} \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(\mathfrak{U}'\mathfrak{T}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{Z})$$

und bei

$$\mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Z}_1^{(n-1)} & * \\ * & * \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{U}'\mathfrak{T}\,\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_1 & \mathfrak{t} \\ \mathfrak{t}' & t \end{pmatrix}$$

folgt

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}\,\mathfrak{K}/\Phi = \lim_{y \to \infty} |\mathfrak{U}|^{-k} \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(\mathfrak{T}_1 \mathfrak{Z}_1)\, e^{-\frac{2\pi y t}{Q}}.$$

Dieser Grenzwert darf nach Satz 1a gliedweise ausgeführt werden. Man erhält

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}\,\mathfrak{K}/\Phi = |\mathfrak{U}|^{-k} \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(\mathfrak{T}_1 \mathfrak{Z}_1),$$

wobei die Summe nur über diejenigen $\mathfrak{T}$ erstreckt werden darf, für die $t = 0$, d.h.

$$\mathfrak{T}[\mathfrak{U}] = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

erfüllt ist, denn aus $t = 0$, $\mathfrak{T} \geq 0$ folgt $\mathfrak{t} = 0$. $f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}\,\mathfrak{K}/\Phi = 0$ hat also

$$a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathfrak{T}[\mathfrak{U}] = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zur Folge. Da $\mathfrak{U}$ beliebig aus Ω_n gewählt war, hat man

$$a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R}) = 0 \quad \text{für} \quad |\mathfrak{T}| = 0,$$

denn bei $|\mathfrak{T}| = 0$ gibt es immer $\mathfrak{U}$ aus Ω_n mit (2.3). Damit ist die eine Richtung der Behauptung bewiesen.

Zum Beweis der Umkehrung habe $f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}$ für jedes rationale $\mathfrak{R}$ aus Σ_n eine Entwicklung nach Satz 3. Bei

$$\mathfrak{T} = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_1 & \mathfrak{t} \\ \mathfrak{t}' & t \end{pmatrix}$$

hat man wieder

$$f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}/\Phi = \lim_{y \to \infty} \sum_{\mathfrak{T} \geq 0} a(\mathfrak{T}, \mathfrak{R})\, e_Q(\mathfrak{T}_1 \mathfrak{Z}_1)\, e^{-\frac{2\pi y t}{Q}}.$$

Da aus $\mathfrak{T} > 0$ notwendig $t > 0$ folgt gehen rechts alle Reihenglieder gegen Null, der Satz ist also vollständig bewiesen.

4. *Beweis von Satz 4.* Da der Beweis des Satzes allein auf der Reihenentwicklung nach Satz 3 beruht, kann er auf zwei allgemeine Hilfssätze zurückgeführt werden. Dazu werde für $\mathfrak{Z}$ aus H_n und natürliches q

$$L_q(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{T}>0} e_q(\mathfrak{T}\mathfrak{Z}) \tag{2.4}$$

gesetzt. Die Summe ist über alle symmetrischen positiven halbganzen Matrizen $\mathfrak{T}^{(n)}$ zu erstrecken, ihre Konvergenz entnimmt man Hilfssatz 2 von MF I.

Hilfssatz 2. *Für alle $\mathfrak{Z}$ aus H_n, für die $\mathfrak{Y} = \mathrm{Im}\,\mathfrak{Z}$ reduziert und $\mathfrak{Y} \geq 2c\mathfrak{E}$ $(c>0)$ ist, gilt*

$$|L_q(\mathfrak{Z})| \leq c_3 e^{-c_4 \cdot \sigma(\mathfrak{Y})}.$$

Dabei sind c_3 und c_4 (später $c_5, \ldots, c_{11}$) geeignete positive Konstanten.

Beweis. Nach MF I (2.1) hat man zuerst für $\mathfrak{T} = (t_{kl}) > 0$,

$$\frac{\pi}{q}\,\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Y}) \geq c_4 \sum_k t_k y_k \geq c_4\,\sigma(\mathfrak{Y}), \qquad \mathfrak{Y} = (y_{kl}),$$

und außerdem

$$\frac{\pi}{q}\,\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Y}) \geq \frac{2\pi c}{q}\,\sigma(\mathfrak{T}),$$

da $\mathfrak{Y} \geq 2c\mathfrak{E}$. Addition dieser beiden Ungleichungen liefert

$$\frac{2\pi}{q}\,\sigma(\mathfrak{T}\mathfrak{Y}) \geq c_4\,\sigma(\mathfrak{Y}) + \frac{2\pi c}{q}\,\sigma(\mathfrak{T}),$$

so daß mit

$$|L_q(\mathfrak{Z})| \leq L_q(i\mathfrak{Y}) \leq e^{-c_4\sigma(\mathfrak{Y})} \cdot L_q(ic\mathfrak{E})$$

der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 3. *Ist*

$$h(\mathfrak{Z}) = \sum_{\mathfrak{T}>0} a(\mathfrak{T})\, e_q(\mathfrak{T}\mathfrak{Z})$$

mit Summation über alle symmetrischen halbganzen positiven $\mathfrak{T}^{(n)}$ gleichmäßig in jedem kompakten, ganz in H_n liegenden Gebiet konvergent, dann gilt für alle $\mathfrak{Z}$ aus H_n, für die $\mathfrak{Y} = \mathrm{Im}\,\mathfrak{Z}$ reduziert und $\mathfrak{Y} \geq 2c\mathfrak{E}$ $(c>0)$ ist,

$$|h(\mathfrak{Z})| \leq c_5\, e^{-c_6\,\sigma(\mathfrak{Y})}.$$

Beweis. Analog MF I (4.6) hat man sofort bei $\mathrm{Im}(\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0) > 0$

$$h(\mathfrak{Z}) = q^{-\frac{n(n+1)}{2}} \int_{W_n(q)} L_q(\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0)\, h(\mathfrak{Z}_0)\, d\mathfrak{X}_0, \quad \mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{X}_0 + i\mathfrak{Y}_0.$$

Man setzt $\mathfrak{Y}_0 = c\mathfrak{E}$, so daß $\mathrm{Im}(\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0) \geq c\mathfrak{E}$ folgt. Eine triviale Abschätzung unter Verwendung von Hilfssatz 2 liefert

$$|h(\mathfrak{Z})| \leq c_5\, e^{-c_4\,\sigma(\mathfrak{Y}-c\mathfrak{E})}$$

und

$$\sigma(\mathfrak{Y}-c\mathfrak{E}) = \tfrac{1}{2}\sigma(\mathfrak{Y}) + \tfrac{1}{2}\sigma(\mathfrak{Y}-2c\mathfrak{E}) \geq \tfrac{1}{2}\sigma(\mathfrak{Y})$$

vollendet den Beweis.

Ist $f(\mathfrak{Z})$ Spitzenform, dann hat $f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{R}$ nach Satz 3 die in Hilfssatz 3 geforderte spezielle Reihenentwicklung, und die Behauptung des Hilfssatzes liefert die Behauptung des Satzes. Die Umkehrung ist trivial.

5. *Beweis von Satz 5.* Zuerst wird Teil a) als bereits bewiesen angenommen. Zum Beweis von b) wird das durch (1.4) definierte Skalarprodukt von f mit g zur Gruppe K mit $(f, g; K)$ bezeichnet. K_1 und K_2 seien nun zwei Kongruenzgruppen mit Multiplikatorsystemen v_1 und v_2 und f und g zwei Funktionen, die sowohl in $\{K_1, k, v_1\}$ als auch in $\{K_2, k, v_2\}$ liegen. Setzt man dann $K_0 = K_1 \cap K_2$, dann ist K_0 Kongruenzgruppe und wegen $K_1 \supseteq K_0$ hat man nach (1.1)

$$\begin{aligned} V(K_0)\,(f, g; K_0) &= \int_{F(K_0)} f(\mathfrak{Z})\,\overline{g(\mathfrak{Z})}\,|\mathfrak{Y}|^{-k}\,\frac{d\mathfrak{X}\,d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}} \\ &= \sum_{\mathfrak{M} \in K_1,\ \mathfrak{M}\, l\, K_0} \int_{\mathfrak{M}\langle F(K_1)\rangle} f(\mathfrak{Z})\,\overline{g(\mathfrak{Z})}\,|\mathfrak{Y}|^{-k}\,\frac{d\mathfrak{X}\,d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}} \\ &= [K_1 : K_0] \int_{F(K_1)} f(\mathfrak{Z})\,\overline{g(\mathfrak{Z})}\,|\mathfrak{Y}|^{-k}\,\frac{d\mathfrak{X}\,d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}} \\ &= [K_1 : K_0]\, V(K_1)\,(f, g; K_1), \end{aligned}$$

also mit (1.2) $(f, g; K_0) = (f, g; K_1)$. Aus Symmetriegründen folgt dann auch $(f, g; K_1) = (f, g; K_2)$, womit b) bewiesen ist.

Die Behauptungen unter c) folgen sofort aus der Definition. Für d) sei q die Stufe von K, d.h. f und g liegen in $\{M_n[q], k, 1\}$. Bei $Q = q \cdot g^2(\mathfrak{R})$ hat man gleichzeitig

$$f/\mathfrak{R},\ g/\mathfrak{R} \in \{\mathfrak{R}^{-1} \cdot M_n[q] \cdot \mathfrak{R}, k, 1\} \subseteq \{M_n[Q], k, 1\}.$$

Nacheinander ist nun

$$(f/\mathfrak{R}, g/\mathfrak{R}) = (f/\mathfrak{R}, g/\mathfrak{R}; M_n[Q]) = (f/\mathfrak{R}, g/\mathfrak{R}; \mathfrak{R}^{-1} \cdot M_n[q] \cdot \mathfrak{R}).$$

Die Substitution $\mathfrak{Z} \to \mathfrak{R}^{-1}\langle\mathfrak{Z}\rangle$ im Integral der rechten Seite liefert sofort für diesen Ausdruck

$$(f, g; M_n[q]) = (f, g),$$

so daß auch d) bewiesen ist.

Zum Beweis von a) kann man ohne Einschränkung $K = M_n[q]$, $v = 1$, annehmen. Man hat unter Verwendung von (1.1)

$$\text{(2.5)} \qquad \begin{cases} (f, g) = \dfrac{1}{V(M_n[q])} \displaystyle\int_{F(M_n[q])} f(\mathfrak{Z})\,\overline{g(\mathfrak{Z})}\,|\mathfrak{Y}|^{-k}\,\dfrac{d\mathfrak{X}\,d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}} \\ \quad = \dfrac{1}{V(M_n)}\,\dfrac{1}{\mu_n(q)} \displaystyle\sum_{\substack{\mathfrak{M} \in M_n \\ \mathfrak{M}\, l\, M_n[q]}} \int_{F(M_n)} f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M} \cdot \overline{g(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M}} \cdot |\mathfrak{Y}|^{-k}\,\dfrac{d\mathfrak{X}\,d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}}. \end{cases}$$

Zur Abschätzung der Integrale auf der rechten Seite gilt bekanntlich ([2] oder [4]) für alle $\mathfrak{Z}$ aus $F(M_n)$

$$\mathfrak{Y} \geqq c_7\,\mathfrak{E} \quad (c_7 > 0).$$

Ist jetzt z.B. f die Spitzenform, dann kann man Satz 4 mit $c = c_7$ anwenden und hat

$$|f(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M}| \leq c_8 e^{-c_9 \sigma(\mathfrak{Y})} \leq c_{10} |\mathfrak{Y}|^k \qquad (-k > 0!)$$

und außerdem nach MF I Satz 2b

$$|g(\mathfrak{Z})/\mathfrak{M}| \leq c_{10}$$

für alle $\mathfrak{Z}$ aus $F(M_n)$. c_9 und c_{10} dürfen dabei durchaus von $\mathfrak{M}$ abhängen. Jedes Integral der rechten Seite von (2.5) hat daher

$$c_{11} \int\limits_{F(M_n)} \frac{d\mathfrak{X}\, d\mathfrak{Y}}{|\mathfrak{Y}|^{n+1}} = c_{11} V(M_n)$$

als Majorante, so daß $|(f, g)| \leq c_{11}$ folgt und die absolute Konvergenz des Skalarproduktes sichergestellt ist.

Münster i. W., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 7. Oktober 1954.)

Stoll, W.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 467—488 (1955)

Über meromorphe Modifikationen.

II. Allgemeine Eigenschaften meromorpher Modifikationen[1]).

Von

Wilhelm Stoll.

In dieser Arbeit wird ein Begriff „*meromorphe Abbildung*" eingeführt und in Verbindung mit Modifikationen untersucht. Eine rationale Abbildung einer algebraischen Mannigfaltigkeit führt bekanntlich meromorphe Funktionen in meromorphe Funktionen über und ist selbst durch meromorphe Funktionen gegeben. Man könnte daher daran denken, eine Abbildung meromorph zu nennen, wenn sie meromorphe Funktionen in ebensolche überführt. Vernünftigerweise muß dann die Existenz nichtkonstanter meromorpher Funktionen auf der Bildmannigfaltigkeit vorausgesetzt werden. Oder man könnte eine Abbildung meromorph nennen, wenn sie bezüglich geeigneter Koordinatensysteme der Bildmannigfaltigkeit durch meromorphe Funktionen gegeben wird. Das würde die Existenz „unbeschränkter" Koordinatensysteme ($\alpha \in \mathfrak{P}$ mit U'_α unbeschränkt) in der Bildmannigfaltigkeit voraussetzen und wiederum eine unsachgemäße Forderung an die Bildmannigfaltigkeit stellen. Die hier gegebene Definition (4.1) vermeidet diese Schwierigkeiten. Sie ist rein lokaler Natur und permanent, d.h., eine Abbildung in einen komplex-projektiven Raum ist dann und nur dann meromorph, wenn sie durch meromorphe Funktionen gegeben wird. Eine analytische Abbildung ist meromorph. Eine Modifikation $\mathfrak{M}$ heißt meromorph, wenn die Modifikationsabbildung[1]) τ meromorph ist. Im Falle der Dimension $2n = 4$ führt eine meromorphe Modifikation analytische Mengen und meromorphe Funktionen in ebensolche über. Der σ-Prozeß[1]) und seine Umkehrung sind meromorphe Modifikationen. Daher lassen sich höchstens meromorphe Modifikationen durch σ-Prozesse erzeugen. Es wird sich später zeigen, daß eine beiderseits offene Modifikation dann und nur dann meromorph ist, wenn sie sich durch σ-Prozesse oder deren Umkehrungen gewinnen läßt.

In dieser Arbeit (Teil II) werden einfachere Eigenschaften meromorpher Abbildungen, sowie meromorpher und analytischer Modifikationen bewiesen. In der nächsten Arbeit wird gezeigt werden, daß im Falle $2n = 4$ die Singularitäten meromorpher beiderseits offener Modifikationen isoliert liegen.

---

[1]) Unter dem gemeinsamen Titel „Über meromorphe Modifikationen" erscheinen eine Reihe von Arbeiten, und zwar Teil I (§§ 1 bis 3), Teil II (§§ 4 bis 6) und Teil III (§§ 7 bis 9) in der Mathematischen Zeitschrift, Teil IV (§§ 10 bis 12) und Teil V (§§ 13 bis 16) in den Mathematischen Annalen. Zur Einleitung, Begriffsbildung und Literatur sei auf Teil I, Math. Z. **61**, 206—234 (1954), hingewiesen.

§ 4. Meromorphe Modifikationen.

Eine Funktion f heißt bekanntlich in einem Gebiet G meromorph, falls sie lokal Quotient analytischer Funktionen ist; diese Definition läßt sich nicht auf Abbildungen übertragen. Aber eine Funktion f ist bekanntlich in einem Gebiet G dann und nur dann meromorph, wenn sie abgesehen von einer analytischen Menge M mit $\dim M \leqq 2n-2$ analytisch ist, und falls sie längs jeder komplexen Kurve L aus G mit $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$, eine meromorphe Funktion induziert, d.h., falls sich f als Abbildung in die Zahlenkugel längs L in P_0 bestimmt verhält, oder, was dasselbe ist, als Abbildung in die Zahlenebenen längs L in P_0 nicht streut. Diese Definition läßt sich auf Abbildungen verallgemeinern:

Definition 4.1. Meromorphe Abbildungen.

Die $2n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit G enthalte die offene Menge A die durch die Abbildung τ analytisch in die $2m$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit H abgebildet werde. Es gebe eine offene Umgebung U von $M = G - A$ und eine in U analytische Menge, die M umfaßt und deren Dimension höchstens $2n-2$ ist. Die Abbildung τ heiße in $P_0 \in G$ meromorph, wenn entweder $P_0 \in A$ ist, oder wenn $P_0 \in M$ ist und es eine offene Umgebung W von P_0 gibt, so daß die Abbildung τ längs jeder komplexen Kurve $L \subset W$, für die $\overline{L} \cap M = L \cap M = \{P_1\}$ gilt, in P_1 nicht streut. Die Abbildung τ heiße in $B \subseteqq G$ meromorph, wenn sie es in jedem Punkt von B ist.

Die Abbildung τ heiße in $P_0 \in M$ hebbar singulär, wenn sie in P_0 regulär ist. Wenn die Abbildung τ in $P_0 \in M$ meromorph und aber nicht regulär ist, so heiße sie dort außerwesentlich singulär, und zwar heiße P_0 ein Pol oder eine Unbestimmtheitsstelle, je nach dem τ (längs G) in P_0 eine Lücke hat oder streut.

Eine gewisse Berechtigung erhält diese Bezeichnungsweise durch den folgenden Satz:

Satz 4.1. Meromorphe Abbildungen in den projektiven Raum.

Voraussetzung. *Die $2n$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit G enthalte die offene Menge A, die durch die Abbildung τ analytisch in den $2m$-dimensionalen komplex-projektiven Raum H, der durch die Koordinatenverhältnisse $(z_0 : z_1 : \ldots : z_m)$ gegeben wird, abgebildet werde. Es gebe eine offene Umgebung U von $M = G - A$ und eine in U analytische Menge, die M umfaßt und deren Dimension höchstens $2n-2$ ist.*

Behauptung. *Dann und nur dann ist die Abbildung τ in G meromorph, wenn jeder Punkt $P_0 \in M$ die Bedingung $\mathfrak{B}$ erfüllt: $\mathfrak{B}$: Es gibt eine offene Umgebung W von P_0 und in W analytische Funktionen $g_0(P), \ldots, g_m(P)$, die in jedem Punkt von W den größten gemeinsamen Teiler 1 haben und für die*

$$\tau(P) = \big(g_0(P) : \ldots : g_m(P)\big) \tag{4.1}$$

auf $W \cap A$ gilt[2]).

[2]) Die Abbildung τ ist also eine „meromorphe Fläche" im Sinne von STOLL [17], § 3, Definition 3.1, deren Unbestimmtheitsstellen in M liegen.

Anmerkung. *Die Bedingung* $\mathfrak{B}$ *ist gleichwertig mit* $\mathfrak{B}^*$: *Es gibt eine offene Umgebung* W *von* P_0, *eine Nummer* ν, *in* W *meromorphe Funktionen* $f_0(P), \ldots, f_{\nu-1}(P), f_{\nu+1}(P), \ldots, f_m(P)$ *und eine in* W *analytische Menge* S, *die leer ist oder die Dimension* $2n-2$ *hat, so daß*

$$\tau(P) = \big(f_0(P) : \ldots : f_{\nu-1}(P) : 1 : f_{\nu+1}(P) : \ldots : f_m(P)\big) \tag{4.2}$$

für $P \in A_\nu = A \cap (W - S)$ *gilt.*

Beweis. a) *Aus* $\mathfrak{B}$ *folgt* $\mathfrak{B}^*$: Indem man gegebenenfalls W verkleinert, kann man W als Gebiet annehmen. Dann ist $g_\nu(P) \not\equiv 0$ für eine Nummer ν. Die Menge $S = \{P \mid g_\nu(P) = 0\}$ ist analytisch in W. Sie ist leer oder hat die Dimension $2n-2$. Mit $f_\mu(P) = \frac{g_\mu(P)}{g_\nu(P)}$ für $\mu = 0, 1, \ldots, \nu-1, \nu+1, \ldots, n$ gilt $\mathfrak{B}^*$.

b) *Aus* $\mathfrak{B}^*$ *folgt* $\mathfrak{B}$: Indem man gegebenenfalls W verkleinert, kann man $m+1$ in W analytische Funktionen $g_0, \ldots, g_m$ finden, die in jedem Punkt von W den größten gemeinsamen Teiler 1 haben und für die $f_\mu = \frac{g_\mu}{g_\nu}$ in W gilt. Ist $P_1 \in A$, so gibt es eine Umgebung $W_1 < W \cap A$ und in W_1 analytische Funktionen $h_0, \ldots, h_m$, die in P_1 den größten gemeinsamen Teiler 1 haben und für die

$$\tau(P) = \big(h_0(P) : \ldots : h_m(P)\big) \tag{4.3}$$

auf W_1 gilt. Also erhält man $\frac{h_\mu}{h_\nu} = f_\mu = \frac{g_\mu}{g_\nu}$ auf W_1, woraus $h_\mu(P) = \lambda(P)\, g_\mu(P)$ für $\mu = 0, \ldots, m$ folgt. Die Funktion $\lambda(P)$ ist in P_1 analytisch und von Null verschieden. Daher gilt

$$\tau(P) = \big(g_0(P) : \ldots : g_m(P)\big) \quad \text{für} \quad P \in W \cap A; \tag{4.4}$$

die Bedingung $\mathfrak{B}$ ist erfüllt.

c) Zu jedem Punkt $P_0 \in A$ gibt es eine Umgebung $V(P_0) \subseteq A$ und darin analytische Funktionen $g_0(P, P_0), \ldots, g_m(P, P_0)$, so daß

$$\tau(P) = \big(g_0(P, P_0) : \ldots : g_m(P, P_0)\big) \tag{4.5}$$

für $P \in V(P_0)$ gilt. Ist $V(P_0) \cap V(P_1) \neq \emptyset$, so ist $\frac{g_\mu(P, P_0)}{g_\mu(P, P_1)} = \lambda(P) \neq 0$ und analytisch in $V(P_0) \cap V(P_1)$. In jedem Cousin-Gebiet $V < A$ gibt es also analytische Funktionen $g_0(P), \ldots, g_m(P)$ mit

$$\tau(P) = \big(g_0(P) : \ldots : g_m(P)\big) \quad \text{für} \quad P \in V. \tag{4.6}$$

d) Die Abbildung τ sei im Punkt $P_0 \in M$ meromorph und die komplexe Kurve L schneide M in P_0 mit $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$. Da τ in P_0 längs L nicht streut und H kompakt ist, verhält sich die Abbildung τ längs L in P_0 bestimmt. Es ist $\tau(P, L)$ auf L stetig, also analytisch.

e) *Die Abbildung* τ *sei im Gebiet* $W \subseteq G$ *meromorph.* Es sei $E = \Big\{(z_0 : \ldots : z_m) \;\Big|\; \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu z_\nu = 0\Big\}$ eine Ebene aus H. In $A \cap W$ ist $S^* = \tau^{-1}(E) \cap W$ analytisch.

Angenommen S^* ist in einem Punkt von $M \cap W$ singulär. Dann ist dim $S^* < 2n$. Da S^* die Nullstellenmenge der Cousin-Verteilung $\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu g_\nu(P, P_0)$ ist, hat S^* die reine Dimension $2n-2$. Da S^* in einem Punkt von M singulär wird, und M in einer analytischen Menge, deren Dimension kleiner als $2n$ ist, liegt, gibt es eine Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$, so daß gilt

1. Durch α wird

$$U'_\alpha = \{\mathfrak{w} \mid |w_\mu| < 1 \quad \mu = 1, \ldots, n\} \tag{4.7}$$

pseudokonform auf $U_\alpha \subset W$ abgebildet.

2. Es ist

$$\alpha^{-1}(M \cap U_\alpha) = \{\mathfrak{w} \mid w_n = 0\} \cap U'_\alpha. \tag{4.8}$$

3. In $M \cap U_\alpha$ ist $S^* \cap U_\alpha$ singulär (THULLEN [19]).

4. Im Cousin-Gebiet $U_\alpha \cap A$ gibt es analytische Funktionen $g_0(P), \ldots, g_m(P)$, so daß

$$\tau(P) = (g_0(P) : \ldots : g_m(P)) \tag{4.9}$$

für $P \in U_\alpha \cap A$ gemäß c) gilt.

5. Es ist

$$S^* \cap U_\alpha = \left\{ P \,\middle|\, \sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu g_\nu(P) = 0 \right\} \cap U_\alpha \cap A. \tag{4.10}$$

Da S^* in $M \cap U_\alpha$ singulär ist, gibt es im Polyzylinder $B = \{(a_1, \ldots, a_{n-1}) \mid |a_\mu| < 1$ für $\mu = 1, \ldots, n-1\}$ eine Nullmenge N, so daß jede komplexe Kurve $E_{a_1, \ldots, a_{n-1}} = \{P \mid P = \alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, w_n)$ mit $|w_n| < 1\}$, für die $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in B - N$ ist, in S^* wenigstens eine Punktfolge $P^\mu = \alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, w_n^\mu) \in S^* \cap E_{a_1, \ldots, a_{n-1}}$ enthält, die gegen $\alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$ strebt[3]). Da $\tau(P)$ längs $E_{a_1, \ldots, a_{n-1}}$ analytisch ist, strebt $\tau(P) \to Q_{a_1, \ldots, a_{n-1}} = (b_0 : \ldots : b_m)$ für $P \to \alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$ und $P \in E_{a_1, \ldots, a_{n-1}} \cap A$. Für eine Nummer $\varrho \neq \nu$ ist $b_\varrho \neq 0$. Daher ist $g_\varrho(\alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, w_n)) \neq 0$ für $0 < |w_n| < \varepsilon$ bei geeigneter Wahl eines $\varepsilon > 0$. Es strebt also

$$h_\mu(w_n) \quad \frac{g_\mu(\alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, w_n))}{g_\varrho(\alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, w_n))} \to \frac{b_\mu}{b_\varrho} \quad \text{für} \quad w_n \to 0. \tag{4.11}$$

Die Funktionen $h_\mu(w_n)$ sind in $|w_n| < \varepsilon$ analytisch. Es ist $\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu h_\nu(w_n^\mu) = 0$ und $\lim_{\mu \to \infty} w_n^\mu = 0$. Daher ist $\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu h_\nu(w_n) \equiv 0$, also auch $\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu g_\nu(\alpha(a_1, \ldots, a_{n-1}, w_n)) \equiv 0$. Es ist $E_{a_1, \ldots, a_{n-1}} \subset S^* \cap U_\alpha$ für $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in B - N$. Daher enthält S^* eine Menge positiven Maßes, was falsch ist. Die Menge $\overline{S^*} \cap W$ ist also in W analytisch und rein $(2n-2)$-dimensional.

Es sei $E_\nu = \{\mathfrak{z} \mid z_\nu = 0\}$. Da $\bigcap_{\nu=0}^{m} \tau^{-1}(E_\nu) \cap W$ leer ist, gibt es eine Nummer ν, so daß $\tau^{-1}(E_\nu) \cap W$ nicht die Dimension $2n$ hat. Also ist $S = \overline{\tau^{-1}(E_\nu)} \cap W$

[3]) Man vgl. STOLL [18] Satz 2.

eine rein $(2n-2)$-dimensionale analytische Menge aus W oder leer. Auf $W \cap A - S$ gibt es analytische Funktionen $f_\mu(P)$, so daß

$$\tau(P) = \big(f_0(P) : \ldots : f_{\nu-1}(P) : 1 : f_{\nu+1}(P) : \ldots : f_m(P)\big) \tag{4.12}$$

für $P \in W \cap A - S$ gilt. Für jeden Punkt $P_0 \in W \cap A$ ist $f_\mu(P) = \frac{g_\mu(P, P_0)}{g_\nu(P, P_0)}$ in $V(P, P_0) \cap W$, wie aus c) folgt. Also sind die Funktionen $f_\mu(P)$ in jedem Punkt von $A \cap W$ meromorph. Ist die Funktion $f_\mu(P)$ in einem Punkt von $M \cap W$ wesentlich singulär, so ist eine ihrer Niveauflächen $f_\mu(P) = a$ mit $a \neq \infty$ in einem Punkt von $M \cap W$ wesentlich singulär. Setzt man $E = \{(z_0 : \ldots : z_m) \mid z_\mu - a\, z_\nu = 0\}$, so ist die analytische Menge $S^* = \tau^{-1}(E) \cap W = \{(P \mid f_\mu(P) = a\} \cap W$ in einem Punkt von $M \cap W$ wesentlich singulär, was nach dem Vorhergehenden falsch ist. Die Funktionen $f_0(P), \ldots, f_{\nu-1}(P), f_{\nu+1}(P), \ldots, f_m(P)$ sind in W meromorph. Die Bedingung $\mathfrak{B}^*$, also auch $\mathfrak{B}$, ist erfüllt.

f) *Die Bedingung $\mathfrak{B}$ sei erfüllt.* Eine komplexe Kurve L aus G mit $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$ sei gegeben. Zu P_0 werden die Umgebung W und die Funktionen $g_0, \ldots, g_m$ der Bedingung $\mathfrak{B}$ bestimmt. Dabei werde W so klein gewählt, daß es eine Parameterdarstellung $\beta(u)$ von $L \cap W$ gibt, die ein den Nullpunkt enthaltendes Gebiet B der u-Ebene konform auf $L \cap W$ abbildet, wobei $\beta(0) = P_0$ sei. Die Funktionen $g_\mu\big(\beta(u)\big)$ sind in B analytisch und nicht alle identisch Null. Daher gibt es eine Zahl $s \geqq 0$ und eine Nummer ν, so daß die Funktionen $u^{-s} g_\mu\big(\beta(u)\big) = h_\mu(u)$ in B analytisch sind und $h_\nu(0) \neq 0$ ist. Es strebt $\tau\beta(u) = \big(h_0(u) : \ldots : h_m(u)\big) \to \big(h_0(0) : \ldots : h_m(0)\big)$ aus H für $u \to 0$. Die Abbildung τ ist in P_0 meromorph, w. z. b. w.

Eine meromorphe Abbildung in die Zahlenebene ist auch eine meromorphe Abbildung in die Zahlenkugel und daher gemäß Satz 4.1 eine meromorphe Funktion. Umgekehrt gibt eine meromorphe Funktion eine meromorphe Abbildung in die Zahlenebene. Ein Pol der Abbildung ist auch ein Pol der Funktion. Eine Unbestimmtheitsstelle der Abbildung ist eine Unbestimmtheitsstelle der Funktion.

Ein analoger Satz gilt nicht mehr bei Abbildungen in einen Koordinatenraum H, wie das Gegenbeispiel

$$G = \{(x : y : z) \mid |x| + |y| + |z| > 0\}, \tag{4.13}$$

$$A = \{(x : y : z) \mid y \neq 0\}, \tag{4.14}$$

$$M = G - A, \tag{4.15}$$

$$H = \{(\xi, \eta) \mid |\xi| < \infty, \quad |\eta| < \infty\}, \tag{4.16}$$

$$\tau(x : y : z) = \left(\frac{x}{y} + \frac{z}{y} e^{\frac{z}{y}}, \frac{z}{y}\right) \tag{4.17}$$

zeigt. Die Abbildung τ von A auf H ist sogar pseudokonform. Es scheint daher in Definition 4.1 zweckmäßiger zu sein von der Abbildung τ bestimmtes Verhalten längs jeder komplexen Kurve L zu verlangen. Dies würde den Geltungsbereich der aufzustellenden Sätze nicht einschränken, aber begrifflich ungünstiger sein. Daher möge es bei der Definition 4.1 bleiben.

Definition 4.2. Meromorphe Modifikationen.

Die Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *heiße meromorph, wenn die Abbildung* τ *in* G *meromorph ist. Die Modifikation* $\mathfrak{M}$ *heiße beiderseits meromorph, wenn* $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{M}^{-1}$ *meromorph sind.*

Satz 4.2. Meromorphe Modifikationen der Dimension 4.

Eine meromorphe Modifikation $\underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *ist beiderseits meromorph.*

Beweis. In H sei eine komplexe Kurve L gegeben, die N nur in einem Punkt Q_0 trifft und für die $L \cap M = \overline{L} \cap M$ gilt. Dann ist zu beweisen, daß die Streumenge $\Sigma(Q_0, L)$ höchstens aus einem Punkt besteht.

Dazu werde zunächst $\overline{L}$ kompakt vorausgesetzt. Da $\overline{L} - L = R$ kompakt ist, ist auch $v(\overline{L} - L) = \widetilde{R}$ kompakt. Durch $W = H - R$ wird eine offene Umgebung von N und durch $\widetilde{W} = G - \widetilde{R}$ eine von M gegeben, wobei $v(W \cap B) = \widetilde{W} \cap A$ ist. Da $L \cap B$ in W analytisch ist, erhält man in $\widetilde{W} \cap A$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge $L^* = v(L \cap B)$, die zugleich eine komplexe Kurve ist.

Angenommen L^* ist in einem Punkt von M singulär, dann ist L^* auch in einem gewöhnlichen Punkt P_0 einer höchstens 2-dimensionalen analytischen Menge singulär, in der M liegt. Man kann also eine ortsuniformisierende Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$ so wählen, daß gilt:

1. Der Polyzylinder $U'_\alpha = \{\mathfrak{z} \mid |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ wird durch α pseudokonform auf $U_\alpha \subseteqq G$ abgebildet.

2. Es ist $P_0 = \alpha(0) \in U_\alpha \subseteqq \widetilde{W}$.

3. Es ist $M' = \alpha^{-1}(M \cap U_\alpha) \subseteqq \{\mathfrak{z} \mid z_2 = 0, |z_1| < 1\} = M'_1$.

4. Die in $U'_\alpha - M'$ analytische Menge $L' = \alpha^{-1}(L^* \cap U_\alpha)$ ist im Nullpunkt singulär.

Nach einem Satz von THULLEN [19] ist L' in M'_1 singulär. Da L^* innerhalb $\widetilde{W}$ nur in M singulär wird, gilt:

5. Es ist $M'_1 = M'$ und L' in M' singulär.

Die Menge der Punkte a_1 des Kreises $|a_1| < 1$, für die $L' \cap \{(a_1, z_2) \mid |z_2| \leqq \frac{1}{2}\}$ aus endlich vielen Punkten besteht, hat das harmonische Maß Null[4]). Außerdem enthält L' höchstens abzählbar viele Kreise $\{(a_1, z_2) \mid |z_2| < 1\}$. Daher gibt es einen Kreis $E' = \{(a_1, z_2) \mid z_2| < \frac{1}{2}\} \not\subset L'$ mit $|a_1| < 1$, so daß $E' \cap L'$ aus abzählbar vielen Punkten besteht, die sich nur in $(a_1, 0)$ häufen. In G ist $E = \alpha(E')$ eine komplexe Kurve, die M nur im Punkt $P_1 = \alpha(a_1, 0)$ trifft, und für die $M \cap E = M \cap \overline{E}$ gilt. Es ist $\overline{E}$ kompakt. In W liegt $\overline{E}$, aber $E \cap A$ ist nicht in L^* enthalten. Eine Punktfolge $P^\nu \in L^* \cap E$ strebt gegen $P_1 \in M$ für $\nu \to \infty$. Es ist $P^\nu \in A$ und $\tau(P^\nu) = Q^\nu \in L \cap B$. Da $\overline{L}$ kompakt ist, gibt es eine gleichbezeichnete konvergente Teilfolge $Q^\nu \to Q_1$ für $\nu \to \infty$. Es ist $Q_1 \in \Sigma(P_1, E) \subseteqq N$ und $Q_1 \in \overline{L}$. Daher ist $Q_1 = Q_0$ und die Abbildung τ ver-

[4]) Man vgl. ROTHSTEIN [15] Satz 7, S. 226.

hält sich längs E in P_0 bestimmt. Nach dem Zusatz zu Satz 3.6 ist $F^* = \tau(E \cap A) \cup \{Q_0\} = \tau(E, E)$ eine komplexe Kurve aus H. Es besteht $E^* \cap L \cap B$ aus abzählbar vielen Punkten, die sich in Q_0 häufen. Das ist aber für zwei komplexe Kurven L, E^* mit $Q_0 \in L \cap E^*$ unmöglich. Die analytische Menge $L^* = v(L \cap B)$ ist in allen Punkten von M, also auch von $\widetilde{W}$ regulär. Daher ist $\overline{L}^* \cap \widetilde{W} = \widetilde{L}$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus $\widetilde{W}$, und zwar die Fortsetzung von L^* in $\widetilde{W}$.

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Die Streumenge $\Sigma_v(Q_0, L)$ ist leer. Dann streut v längs L in Q_0 nicht.

2. Fall: Die Streumenge $\Sigma_v(Q_0, L)$ enthält einen Punkt R. Dann wird behauptet, daß R der einzige Punkt von $\Sigma_v(Q_0, L)$ ist. Man kann nämlich eine gegen $Q_0 \in N$ konvergierende Folge Q^ν aus $L \cap B$ finden, so daß $P^\nu = v(Q^\nu) \to R$ für $\nu \to \infty$ strebt. Wegen $P^\nu \in v(L \cap B) = L^*$ gehört R zu $\overline{L}^* \cap M = \widetilde{L} \cap M$. Da $\widetilde{L}$ in $\widetilde{W}$ analytisch und rein 2-dimensional ist, gibt es durch $R \in M$ eine komplexe Kurve C mit $C \cap M = \overline{C} \cap M$, für die $\overline{C}$ kompakt und in $\widetilde{L}$ enthalten ist. Es gilt

$$\tau(C \cap A) \subseteqq \tau(\widetilde{L} \cap A) = \tau(L^* \cap A) = \tau v(L \cap B) = L \cap B \subseteqq \overline{L}. \tag{4.18}$$

Weil $\overline{L}$ kompakt ist, enthält $\Sigma_\tau(R, C)$ wenigstens ein Element, und weil die Modifikation $\mathfrak{M}$ meromorph ist, auch nur eines. Es ist

$$\Sigma_\tau(R, C) \subseteqq N \cap \overline{\tau(C \cap A)} \subseteqq N \cap \overline{L} = \{Q_0\}. \tag{4.19}$$

Also besteht $\Sigma_\tau(R, C)$ aus dem einzigen Punkt Q_0. Nach dem Zusatz zu Satz 3.6 wird C durch $\tau(P, C)$ konform auf eine komplexe Kurve

$$C^* = \tau(C, C) = \tau(C \cap A) \cup \{Q_0\} \subseteqq \overline{L} \tag{4.20}$$

abgebildet, wobei $Q_0 = \tau(R, C)$ ist. Auf der komplexen Kurve L bildet C^* eine Umgebung von Q_0. Ist also $R_1 \in \Sigma_v(Q_0, L)$, so konvergiert eine Folge $\widetilde{Q}^\nu \to Q_0$ für $\nu \to \infty$ mit $\widetilde{Q}^\nu \in L \cap B$, wobei $v(\widetilde{Q}^\nu) \to R_1$ für $\nu \to \infty$ strebt. Es ist $\widetilde{Q}^\nu \in C^*$ für $\nu \geqq \nu_0$, also gilt

$$R_1 = \lim_{\nu \to \infty} v(\widetilde{Q}^\nu) = \lim_{\nu \to \infty} \tau^{-1}(\widetilde{Q}^\nu, C) = \tau^{-1}(Q_0, C) = R. \tag{4.21}$$

Die Streumenge $\Sigma_v(Q_0, L)$ besteht aus einem einzigen Punkt.

Ist nun die bei Beginn des Beweises gegebene komplexe Kurve L nicht kompakt, so gibt es eine offene Umgebung V von Q_0, für die $\overline{V}$ kompakt und $V \cap L = V \cap \overline{L}$ ist. Die komplexe Kurve $V \cap L$ streut nach dem bisherigen Beweis in Q_0 nicht, es ist $M \cap \overline{V \cap L} = M \cap V \cap L$ und $\Sigma_v(Q_0, V \cap L) = \Sigma_v(Q_0, L)$; daher streut auch L in Q_0 nicht, w. z. b. w.

Beim Beweis des Satzes wurde wesentlich benutzt, daß $n = 2$ ist. Vermutlich dürfte der Satz auch für $n > 2$ richtig sein.

Satz 4.2 wird ungültig, wenn man in Definition 4.1 von τ bestimmtes Verhalten längs L in P_1 fordern würde; die Gültigkeit von Satz 4.2 ist einer

der Gründe, weshalb nur verlangt wurde, daß τ längs L nicht in P_1 streut und nicht sogar sich bestimmt verhalten müsse.

Die meromorphen und offenen Modifikationen sind im Falle $n=2$ gerade die offenen Modifikationen, bei denen analytische Mengen in analytische Mengen übergehen.

Satz 4.3. Analytische Mengen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen.*

Behauptung. *Dann und nur dann ist die Modifikation* $\mathfrak{M}$ *meromorph, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*

Wenn U *eine offene Umgebung von* M *und* $L \subseteqq U$ *eine in* U *analytische Menge mit* $\dim L \leqq 2$ *ist, so verhält sich die in* $\tau(U \cap A)$ *analytische Menge* $\tilde{L}=\tau(L \cap U)$ *in jedem Punkt von* N *regulär.*

Beweis. a) Die offene Modifikation $\mathfrak{M}$ sei meromorph. In der offenen Umgebung U von M sei eine analytische Menge L mit $\dim L \leqq 2$ gegeben. Dann ist $V=\tau(A \cap U) \cup N$ offen und $\tilde{L}=\tau(L \cap U)$ in $V \cap B$ analytisch mit $\dim \tilde{L} \leqq 2$. Falls vorhanden sei $\tilde{L}_2$ der rein 2-dimensionale Bestandteil von $\tilde{L}$. Angenommen $\tilde{L}_2$ ist in einem Punkt $Q_0 \in N$ singulär. Dann gibt es eine offene Umgebung $V_1 \subseteqq V$ von Q_0 und eine in V_1 analytische Menge $N^* \supseteqq V_1 \cap N$ mit $\dim N^* \leqq 2$. Da $\tilde{L}_2$ in $Q_0 \in N^*$ singulär ist, gibt es einen gewöhnlichen Punkt $Q_1 \in N^*$, in dem $\tilde{L}_2$ singulär ist. Dann ist $\dim_{Q_1} N^*=2$. Man kann einen Polyzylinder $Z=\{\mathfrak{z} \mid |z_\nu|<1\}$ bestimmen, der durch eine pseudokonforme Abbildung $\alpha(\mathfrak{z})$ so auf eine Umgebung $V_2 \subseteqq V_1$ abgebildet wird, daß $\alpha(0)=Q_1$ und

$$N^* \cap V_2=\{Q \mid (z_1, 0)=\alpha^{-1}(Q) \quad \textit{mit} \quad |z_1|<1\} \tag{4.22}$$

ist. Da $\tilde{L}_2$ in jedem Punkt von $N^* \cap V_2$ singulär wird, ist $N^* \cap V_2=N \cap V_2$ und es gibt eine Zahl a_1 mit $|a_1|<1$, so daß

$$C=\{Q \mid \alpha^{-1}(Q)=(a_1, z_2) \quad \textit{mit} \quad |z_2|<\tfrac{1}{2}\} \tag{4.23}$$

mit $\tilde{L}_2$ eine Punktfolge $Q^\nu \in \tilde{L}_2 \cap C \subseteqq B$ gemeinsam hat, die gegen $Q_2=\alpha(a_1, 0) \in N$ strebt, daß aber $C \cap B$ nicht in $\tilde{L}_2$ enthalten ist[4]). Weil $\mathfrak{M}$ offen ist, strebt für eine gleichbezeichnete Teilfolge $\tau(Q^\nu)=P^\nu \to P_2 \in M$. Da mit $\mathfrak{M}$ auch $\mathfrak{M}^{-1}$ meromorph ist, da P_2 zu $\Sigma_v(Q_2, C)$ gehört, da $C \cap N=\overline{C} \cap N=\{Q_2\}$ ist und weil C eine komplexe Kurve aus H mit kompakter abgeschlossener Hülle $\overline{C}$ ist, wird durch $v(Q, C)$ die komplexe Kurve C konform auf die komplexe Kurve $\tilde{C}=v(C, C)$ abgebildet, wobei $\tilde{C} \cap M=\overline{\tilde{C}} \cap M=\{P_2\}$ und $P_2=v(Q_2, C)$ ist. Wegen $C \subseteqq V$ ist

$$\tilde{C}=v(C, C)=v(C \cap B) \cup \{P_2\} \subseteqq v(V \cap B) \cup M=U. \tag{4.24}$$

Es ist $P^\nu \in A \cap \tilde{C} \cap L_2$, wenn L_2 der 2-dimensionale Bestandteil von L ist. Es strebt $P^\nu \to P_2 \in L_2 \cap M \cap \tilde{C}$ für $\nu \to \infty$. Also ist die zusammenhängende

komplexe Teilmannigfaltigkeit $\tilde{C}$ von U in L_2 enthalten; denn L_2 ist in P_2 regulär. Man erhält

$$C \cap B = \tau(\tilde{C} \cap A) \subsetneqq \tau(L_2 \cap A) = \tilde{L}_2 \tag{4.25}$$

entgegen der Konstruktion von C. In jedem Punkt von N ist $\tilde{L}_2$ regulär.

Falls vorhanden sei $\tilde{L}_0$ der 0-dimensionale Bestandteil von $\tilde{L}$. Angenommen $\tilde{L}_0$ ist in einem Punkt $Q_0 \in N$ singulär. Dann gibt es eine Folge $Q^\nu \in \tilde{L}_0 \subseteq B$, die gegen Q_0 strebt. Da die Modifikation $\mathfrak{M}$ offen ist, strebt für eine gleichbezeichnete Teilfolge $P^\nu = v(Q^\nu) \to P_0 \in M$ für $\nu \to \infty$, wobei $0 = \dim_{Q^\nu} \tilde{L}_0 = \dim_{I^\nu} L$ ist. Also ist L in P_0 singulär, was falsch ist.

Da $\tilde{L}_0$ und $\tilde{L}_2$, falls vorhanden, in N regulär sind, ist auch $\tilde{L}$ in N regulär.

b) Die Modifikation $\mathfrak{M}$ sei offen und die in der Behauptung genannte Bedingung sei erfüllt.

Eine komplexe Kurve $L \subset G$ mit $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$ sei gegeben. Ist $\Sigma_\tau(P_0, L)$ leer, so streut τ längs L in P_0 nicht. Nun sei $\Sigma_\tau(P_0, L) \neq \emptyset$. Weil es zu jedem Punkt von L eine Umgebung W mit $W \cap L = W \cap \overline{L}$ gibt, ist $U = G - (\overline{L} - L) = (G - \overline{L}) \cup L$ offen und L eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus U. Es ist

$$M \cap U = M \cap [G - (\overline{L} - L)] = M - (M \cap \overline{L} - M \cap L) = M. \tag{4.26}$$

Also ist M in U enthalten. Weil die Modifikation $\mathfrak{M}$ offen ist, wird durch $V = \tau(U \cap A) \cup N$ eine offene Umgebung von N gegeben. Nach Voraussetzung ist die in $\tau(U \cap A)$ analytische Menge $\tau(L \cap A)$ in V regulär. Also ist $V \cap \overline{\tau(L \cap A)}$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus V, die $\tau(L \cap A)$ umfaßt. Nach Satz 3.5 verhält sich die Abbildung τ längs L in P_0 bestimmt. Die Modifikation $\mathfrak{M}$ ist meromorph, w. z. b. w.

Eine meromorphe, nichtoffene Modifikation braucht eine analytische Menge nicht in eine analytische Menge überführen. Beispielsweise seien

$$G = \{(z_1, z_2) \mid |z_1| < \infty, \quad 0 < |z_2| < \infty\},$$

$$A = G, \quad M = G - A = \emptyset,$$

$$H = \{(w_1, w_2) \mid |w_1| < \infty, \quad |w_2| < \infty\},$$

$$B = \{(w_1, w_2) \mid |w_1| < \infty, \quad 0 < |w_2| < \infty\},$$

$$N = H - B,$$

$$\tau(z_1, z_2) = (z_1 + e^{1/z_2}, z_2),$$

$$v(w_1, w_2) = (w_1 - e^{1/w_2}, w_2),$$

$$L = \{(z_1, z_2) \mid z_1 = 0\} \cap G,$$

$$\tilde{L} = \{(w_1, w_2) \mid w_1 = e^{1/w_2}\} \cap B = \tau(L \cap A).$$

Die Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{2}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ ist meromorph aber nicht offen. In G ist L analytisch und rein 2-dimensional, aber $\tilde{L} = \tau(L \cap A)$ ist in jedem Punkt von N singulär.

Ob Satz 4.3 bei höheren Dimensionen ($n > 2$) gilt, bleibt ungeklärt.

Satz 4.4. Meromorphe Funktionen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen. Die inverse Modifikation* $\mathfrak{M}^{-1}$ *sei meromorph. In einer offenen Umgebung* U *von* M *sei die Funktion* f *meromorph.*

Behauptung. *Die in* $\tau(U \cap A)$ *meromorphe Funktion* $g(Q) = f\big(v(Q)\big)$ *läßt sich eindeutig und meromorph in die offene Umgebung* $V = \tau(U \cap A) \cup N$ *von* N *fortsetzen.*

Beweis. Für jede komplexe Zahl a und für $a = \infty$ sind die Niveauflächen $L_a = \{P \mid f(P) = a\} \cap U$ in U und $\tilde{L}_a = \tau(L_a \cap A)$ in $V \cap B = \tau(A \cap U)$ analytisch Angenommen $\tilde{L}_a$ ist in einem Punkt von N singulär. Dann gibt es eine Umgebung $V_0 \subseteqq V$ dieses Punktes, darin eine analytische Menge $N^* \supseteqq V_0 \cap N$ und in N^* einen gewöhnlichen Punkt Q_0 in dem $\tilde{L}_a$ singulär wird. Man kann eine ortsuniformisierende Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}(H)$ so wählen, daß gilt:

1. Der Polyzylinder $U'_\alpha = \{\mathfrak{z} \mid |z_\nu| < 1\}$ wird durch α pseudokonform auf $U_\alpha \subseteqq V$ abgebildet, wobei $\alpha(0) = Q_0 \in U_\alpha$ ist.

2. Es ist

$$N' = \alpha^{-1}(N \cap U_\alpha) \subseteqq \{\mathfrak{z} \mid z_n = 0\} \cap U'_\alpha = \alpha^{-1}(N^* \cap U_\alpha).$$

3. Die in $U'_\alpha - N'$ analytische Menge $\tilde{L}'_a = \alpha^{-1}(\tilde{L}_a \cap U_\alpha)$ ist im Nullpunkt singulär und hat die Dimension $2n-2$.

Nach THULLEN [19] ist L' in $\alpha^{-1}(N^* \cap U_\alpha)$ singulär, weshalb $N' = \{\mathfrak{z} \mid z_n = 0\} \cap U'_\alpha$ ist. Die Menge der Punkte $\mathfrak{b}$ des Polyzylinders $\{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_{n-1})$ mit $|b_\nu| < 1\}$, für die der Durchschnitt von $\tilde{L}'_a$ mit $E'_\mathfrak{b} = \{(\mathfrak{b}, z_n) \mid |z_n| < \frac{1}{2}\}$ höchstens aus endlich vielen Punkten besteht, hat das Maß Null[3]). Ebenso ist die Menge der $\mathfrak{b}$ mit $\tilde{L}'_a \supset E'_\mathfrak{b}$ eine Nullmenge. Daher gibt es einen Punkt $\mathfrak{b} = (b_1, \ldots, b_{n-1})$ mit $|b_\nu| < 1$, so daß $\tilde{L}'_a \cap E'_\mathfrak{b}$ aus abzählbar vielen Punkten $\mathfrak{z}_\nu$ besteht. Es strebt $\mathfrak{z}_\nu \to (\mathfrak{b}, 0) = \mathfrak{c}$ für $\nu \to \infty$. Die komplexe Kurve $E_\mathfrak{b} = \alpha(E'_\mathfrak{b})$ trifft N in dem einzigen Punkt $Q_1 = \alpha(\mathfrak{c})$, es ist $E_\mathfrak{b} \cap N = \overline{E}_\mathfrak{b} \cap N$ und $\overline{E}_\mathfrak{b}$ kompakt. Da $\mathfrak{M}$ offen und $\mathfrak{M}^{-1}$ meromorph ist, verhält sich die Abbildung v längs $E_\mathfrak{b}$ in Q_1 bestimmt. Durch $v(Q, E_\mathfrak{b})$ wird $E_\mathfrak{b}$ nach dem Zusatz von Satz 3.6 konform auf die komplexe Kurve $E^*_\mathfrak{b} = v(E_\mathfrak{b}, E_\mathfrak{b})$ abgebildet, wobei Q_1 in $P_1 = v(Q_1, E_\mathfrak{b})$ übergeht. Die Punkte $v\alpha(\mathfrak{z}_\nu) = P_\nu$ häufen sich in P_1 und nur in P_1. Es ist $\{P \mid P = P_\nu\} = L_a \cap A \cap E_\mathfrak{b}$. Da $E_\mathfrak{b}$ eine komplexe Kurve aus U, die P_1 enthält, und L_a in U analytisch ist, ergibt sich ein Widerspruch. Also ist $\tilde{L}_a$ in keinem Punkt von N singulär. Nach THULLEN [19] ist die in $\tau(U \cap A) = V \cap B$ meromorphe Funktion $g(Q) = f\big(v(Q)\big)$ deren Niveauflächen gerade die

analytischen Mengen $\tilde{L}_a$ sind, in jedem Punkt von U nicht wesentlich singulär, läßt sich also meromorph und eindeutig in $V=\tau(U\cap A)\cup N$ fortsetzen, w. z. b. w.

Im Falle $n=2$ ist eine meromorphe Modifikation beiderseits meromorph. Also ergibt sich:

Satz 4.5. Meromorphe Funktionen.

Voraussetzung. *Die offene Modifikation* $\mathfrak{M}\begin{pmatrix}G,A,M,\tau\\H,B,N,v\end{pmatrix}$ *sei meromorph. In einer offenen Umgebung* U *von* M *sei die Funktion* f *meromorph.*

Behauptung. *Die in* $\tau(U\cap A)$ *meromorphe Funktion* $g(Q)=f\big(v(Q)\big)$ *läßt sich eindeutig und meromorph in die offene Umgebung* $V=\tau(U\cap A)\cup N$ *von* N *fortsetzen.*

§ 5. Analytische Modifikationen.

Ein wichtiger Spezialfall der meromorphen Modifikationen sind die analytischen Modifikationen:

Definition 5.1. Analytische Modifikationen.

Die Modifikation $\mathfrak{M}\begin{pmatrix}G,A,M,\tau\\H,B,N,v\end{pmatrix}$ *heiße analytisch, wenn sich* v *in jedem Punkt von* N *regulär verhält, oder, was dasselbe ist, wenn sich* v *aus* B *in* H *analytisch fortsetzen läßt.*

Die Abbildung v verhält sich bei einer analytischen Modifikation bestimmt. Die Fortsetzung von v in H ist eindeutig bestimmt und wird durch $v(Q,H)$ gegeben.

Satz 5.1. *Eine analytische Modifikation ist offen.*

Beweis. Die Modifikation $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\begin{pmatrix}G,A,M,\tau\\H,B,N,v\end{pmatrix}$ sei analytisch. Ist $Q_\nu\in B$ und strebt $Q_\nu\to Q\in N$ für $\nu\to\infty$, so strebt $v(Q_\nu)\to v(Q,H)\in M$ für $\nu\to\infty$. Nach Satz 2.3 ist die Modifikation $\mathfrak{M}$ offen, w. z. b. w.

Aus Satz 2.9 folgt unmittelbar:

Satz 5.2. *Die offene Modifikation* $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\begin{pmatrix}G,A,M,\tau\\H,B,N,v\end{pmatrix}$ *ist dann und nur dann analytisch, wenn die Abbildung* v *(längs* H*) in* N *nicht streut.*

Satz 5.3. *Eine analytische Modifikation ist beiderseits meromorph.*

Beweis. Die Modifikation $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}\begin{pmatrix}G,A,M,\tau\\H,B,N,v\end{pmatrix}$ sei analytisch. Da die Abbildung v sich in N längs H bestimmt verhält, verhält sie sich auch längs jeder komplexen Kurve L aus H bestimmt. Die inverse Modifikation $\mathfrak{M}^{-1}$ ist meromorph.

Eine komplexe Kurve L aus G mit $L\cap M=\overline{L}\cap M=\{P_0\}$ sei gegeben. Wie im Beweis von Satz 3.5 bestimmt man eine offene Menge $U\supset M$, so daß $U\cap L$ eine rein 2-dimensionale analytische Menge aus U ist. Die offene Menge $V=\tau(U\cap A)\cup N$ wird durch $v(Q,H)$ analytisch in U abgebildet. Daher ist

$L^* = v^{-1}(L \cap U, H)$ analytisch. Es ist $L^* \cap B = \tau(L \cap A \cap U)$ und $\dim_Q L^* = 2$ für $Q \in B \cap L^*$. Die Vereinigung der 2-dimensionalen irreduzilen Teile von L^* ist in V analytisch und rein 2-dimensional. Sie umfaßt $\tau(A \cap U \cap L)$. Nach Satz 3.5 besteht $\Sigma_\tau(P_0, L)$ aus höchstens einem Punkt. Neben $\mathfrak{M}^{-1}$ ist auch $\mathfrak{M}$ meromorph, also ist die Modifikation $\mathfrak{M}$ beiderseits meromorph, w. z. b. w.

Dieser Satz wird ungültig, wenn man in Definition 4.1 verlangt, daß sich die Abbildung τ längs L (in P_0) bestimmt verhält. Das spricht wiederum für die dort gegebene Definition. Unmittelbar leuchtet ein:

Satz 5.4. Analytische Mengen bei analytischen Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *sei analytisch. In* G *liege die analytische Menge* L.

Behauptung. *In* H *ist* $\tilde{L} = v^{-1}(L, H)$ *analytisch.*

Satz 5.5. Lücken bei analytischen Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *sei analytisch.*

Behauptung. *Der Punkt* $P_0 \in M$ *ist dann und nur dann eine Lücke, d.h. ein Pol von* τ, *wenn* $P_0 \notin v(N, H) = M \cap v(H, H)$ *ist.*

Beweis. Nach Definition 1.2 ist $v(H, H) \cap M = v(N, H)$. Ist $P_0 \in v(N, H)$, so gibt es einen Punkt $Q_0 \in N$ mit $P_0 = v(Q_0, H)$ und eine Folge $Q^\nu \to Q_0$ für $\nu \to \infty$ mit $Q^\nu \in B$. Es strebt $P_\nu = v(Q^\nu) \to v(Q_0, H) = P_0$ für $\nu \to \infty$. Daher gehört der Punkt Q_0 zur Streumenge $\Sigma_\tau(P_0)$. Es ist P_0 kein Pol von τ.

Ist $\Sigma_\tau(P_0)$ nicht leer, so gibt es nach (1.16) einen Punkt $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0)$ mit $P_0 \in \Sigma_v(Q_0, H)$. Daher ist $P_0 = v(Q_0, H) \in v(H, H) = M$, w. z. b. w.

Aus Satz 5.4 folgt:

Satz 5.6. Verhalten komplexer Kurven.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *sei offen. In* G *liege die komplexe Kurve* L, *für die* $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$ *gelte. In einem Punkt* $Q_0 \in \Sigma_\tau(P_0, L)$ *streue die Abbildung* v *nicht.*

Behauptung. *Die Abbildung* τ *verhält sich längs* L *in* P_0 *bestimmt.*

Beweis. Nach Satz 2.9 ist v in einer offenen Umgebung V von Q_0 regulär. Es wird $V \cup B$ durch $v(Q, H)$ analytisch in G abgebildet. Daher ist die Modifikation $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}\binom{G, \quad A, \quad M, \quad \tau}{V \cup B, \; B, \; N \cap V, \; v}$ analytisch. Die Abbildung τ ist als Abbildung in $V \cap B$ meromorph und werde als solche mit τ_1 bezeichnet. Da $Q_0 \in \Sigma(P_0, L) \cap V$ ist, verhält sich die Abbildung τ_1 längs L in P_0 bestimmt. Nach Satz 3.6 ist $\tilde{L} = \tau_1(L, L)$ eine komplexe Kurve aus $V \cup B$, wobei $\overline{\tilde{L}} \cap V \cap N = \tilde{L} \cap V \cap N = \{Q_0\}$ mit $Q_0 = \tau_1(P_0, L)$ gilt. Ist $Q_1 \in \Sigma(P_0, L)$, so gibt es eine Folge $Q^\nu = \tau(P^\nu)$ mit $P^\nu \in L$, so daß $Q^\nu \to Q_1$ und $P^\nu \to P_0$ für $\nu \to \infty$ streben. Es ist $Q_1 = \lim_{\nu \to \infty} Q^\nu = \lim_{\nu \to \infty} \tau_1(P^\nu, L) = \tau_1(P_0, L) = Q_0$. Es verhält sich τ längs L in P_0 bestimmt, w. z. b. w.

Bei einer Modifikation $\mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ kann man vielleicht τ in einen Teil von M analytisch und in einen vielleicht etwas kleineren Teil pseudokonform fortsetzen. Entsprechendes ist vielleicht für die Abbildung v möglich. Vom gegenseitigen Verhältnis dieser Fortsetzungen handelt

Satz 5.7. Analytische und pseudokonforme Fortsetzung.

Voraussetzung. 1. *Eine Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ *sei gegeben.*

2. *Der Punkt* $P \in G$ *gehöre dann und nur dann zur Menge* A_0, *wenn die Abbildung* τ *in* P *regulär ist.*

3. *Der Punkt* $Q \in H$ *gehöre dann und nur dann zur Menge* B_0, *wenn die Abbildung* v *in* Q *regulär ist.*

4. *Der Punkt* $P \in G$ *gehöre dann und nur dann zur Menge* E, *wenn die Abbildung* τ *sich aus* A *in eine Umgebung von* P *pseudokonform fortsetzen läßt.*

5. *Der Punkt* $Q \in H$ *gehöre dann und nur dann zur Menge* $\underline{E}$, *wenn sich die Abbildung* v *aus* B *in eine Umgebung von* Q *pseudokonform fortsetzen läßt.*

Behauptung. 1. *Die Mengen* $A_0, B_0, E, \underline{E}$ *sind offen. Es gilt*

$$A \subseteq E \subseteq A_0 \subseteq G, \qquad B \subseteq \underline{E} \subseteq B_0 \subseteq H. \tag{5.1}$$

2. *Die Abbildung* τ *läßt sich aus* A *analytisch in* A_0 *zur Abbildung* τ_0 *fortsetzen, und zwar auf nur eine Weise. In jedem Punkt von* $M_0 = G - A_0 = M - A_0$ *ist* τ_0 *singulär. Für* $P \in A_0$ *ist* $\tau_0(P) = \tau(P, G)$.

3. *Die Abbildung* v *läßt sich aus* B *analytisch in* B_0 *zur Abbildung* v_0 *fortsetzen, und zwar auf nur eine Weise. In jedem Punkt von* $N_0 = H - B_0 = N - B_0$ *ist* v_0 *singulär. Für* $Q \in B_0$ *ist* $v_0(Q) = v(Q, H)$.

4. *Die auf* E *beschränkte Abbildung* $\tau^* = \tau_0 | E$ *bildet* E *pseudokonform auf* $\underline{E}$ *ab und läßt sich in keinen Punkt von* $M^* = G - E = M - E$ *pseudokonform fortsetzen. Es ist* $\tau_0(A_0 - E) \cap B_0 = \emptyset$.

5. *Die auf* $\underline{E}$ *beschränkte Abbildung* $v^* = v_0 | \underline{E}$ *bildet* $\underline{E}$ *pseudokonform auf* E *ab und läßt sich in keinen Punkt von* $N^* = H - \underline{E} = N - \underline{E}$ *pseudokonform fortsetzen. Es ist* $v_0(B_0 - \underline{E}) \cap A_0 = \emptyset$.

6. *Es ist* $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}\binom{G, E, M^*, \tau^*}{H, \underline{E}, N^*, v^*}$ *eine Modifikation. Ist* $\mathfrak{M}$ *meromorph oder analytisch, so ist auch* $\mathfrak{M}^*$ *meromorph bzw. analytisch. Ist* $\mathfrak{M}$ *offen und hat* G *eine abzählbare Basis der offenen Mengen, so ist auch* $\mathfrak{M}^*$ *offen.*

Beweis. Da sich in geeigneten Umgebungen M und N als Teilmengen analytischer Mengen mit Dimensionen kleiner als $2n$ auffassen lassen, sind die Behauptungen 1 bis 3 trivial, sind die lokal-pseudokonformen Abbildungen τ^* und v^* auf E bzw. $\underline{E}$ pseudokonform und lassen sich nicht über E bzw. $\underline{E}$ hinaus pseudokonform fortsetzen.

Auf $E^* = \tau^*(E)$ ist $\tau^{*-1}(Q)$ pseudokonform und setzt $v(Q)$ analytisch fort; also ist $v^*(Q) = \tau^{*-1}(Q)$ für $Q \in E^*$ und $E^* \subseteq \underline{E}$. Ebenso gilt $v^{*-1}(P) = \tau^*(P)$

für $P \in \underline{E}^* = v^*(\underline{E})$ und $\underline{E}^* \subseteqq E$. Es ist

$$E^* = \tau^*(E) \supseteqq \tau^*(\underline{E}^*) = v^{*-1}(\underline{E}^*) = \underline{E} \supseteqq E^* \tag{5.2}$$

also $E^* = \underline{E}$; ebenso folgt $\underline{E}^* = E$.

Da τ_0 auf A_0 analytisch ist, da v_0 auf B_0 analytisch ist, da $v_0\tau_0(P) = v\,\tau(P) = P$ für $P \in A$ gilt, und da $M = G - A$ keinen inneren Punkt enthält, ist $v_0\tau_0(P) = P$ für $P \in A_0 \cap \tau_0^{-1}(B_0)$. Auf $A_0 \cap \tau_0^{-1}(B_0)$ hat daher $v_0\tau_0$ also auch τ_0 den Rang n; also ist $A_0 \cap \tau_0^{-1}(B_0) \subseteqq E$. Es gilt

$$v_0\big(\tau_0(A_0 - E) \cap B_0\big) = (A_0 - E) \cap \tau_0^{-1}(B_0) = \emptyset\,. \tag{5.3}$$

Also ist $\tau_0(A_0 - E) \cap B_0$ leer. Ebenso zeigt man, daß $v_0(B_0 - \underline{E}) \cap A_0$ leer ist. Die Behauptungen 4 und 5 sind bewiesen.

Ist v auf M regulär, so ist auch v^* auf M^* regulär. Streut die Abbildung τ längs der Kurve L, für die $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$ gilt, in P_0 nicht, und ist $P_0 \in M^*$, so streut auch die Abbildung τ^* längs L in P_0 nicht. Mit $\mathfrak{M}$ ist also auch $\mathfrak{M}^*$ analytisch bzw. meromorph.

Ist nun $\mathfrak{M}$ offen und hat G eine abzählbare Basis der offenen Mengen, so trägt G eine Metrik $\varrho(P, Q)$. Ein Punkt $Q \in N^*$ und eine gegen Q strebende Folge $Q^\nu \in \underline{E}$ seien gegeben. Zu Q bestimmt man eine Umgebung V, die eine Metrik $\tilde{\varrho}(P, R)$ trägt. Für $\nu \geqq \nu_0$ ist $Q^\nu \in V$. Man wählt zu jeder Nummer $\nu \geqq \nu_0$ eine Folge $Q_\mu^\nu \in V \cap B$, die gegen Q^ν strebt. Es sei $P^\nu = v^*(Q^\nu)$ und $P_\mu^\nu = v(Q_\mu^\nu)$. Es strebt $P_\mu^\nu \to P^\nu$ für $\mu \to \infty$. Zu jeder Nummer ν kann man eine Nummer μ_ν bestimmen, so daß $\tilde{\varrho}(Q^\nu, Q_{\mu_\nu}^\nu) < \frac{1}{\nu}$ und $\varrho(P^\nu, P_{\mu_\nu}^\nu) < \frac{1}{\nu}$ ist. Es sei $Q_{\mu_\nu}^\nu = \widetilde{Q}^\nu$ und $P_{\mu_\nu}^\nu = \widetilde{P}^\nu$. Wegen

$$\tilde{\varrho}(Q_0, \widetilde{Q}^\nu) \leqq \tilde{\varrho}(Q_0, Q^\nu) + \tilde{\varrho}(\widetilde{Q}^\nu, Q^\nu) \leqq \tilde{\varrho}(Q_0, Q^\nu) + \frac{1}{\nu} \tag{5.4}$$

strebt $\widetilde{Q}^\nu \to Q_0$ für $\nu \to \infty$. Da $\mathfrak{M}$ offen und $\widetilde{Q}^\nu \in B$ ist, gibt es eine Teilfolge $\widetilde{Q}^{\nu_\lambda}$, so daß $\widetilde{P}^{\nu_\lambda} = v(\widetilde{Q}^{\nu_\lambda}) \to P \in M$ für $\lambda \to \infty$ strebt. Wegen

$$\varrho(P, P^{\nu_\lambda}) \leqq \varrho(P, \widetilde{P}^{\nu_\lambda}) + \varrho(\widetilde{P}^{\nu_\lambda}, P^{\nu_\lambda}) < \varrho(P, \widetilde{P}^{\nu_\lambda}) + \frac{1}{\nu_\lambda} \tag{5.5}$$

strebt $P^{\nu_\lambda} \to P$ für $\lambda \to \infty$. Die Modifikation $\mathfrak{M}^*$ ist offen, w. z. b. w.

Dieser Satz gibt die Berechtigung zur folgenden Erklärung:

Definition 5.2. Änderungen durch eine Modifikation.

Bei der Modifikation $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *mögen dieselben Bezeichnungen wie in Satz* 5.7 *verwandt werden. Die Modifikation* $\mathfrak{M}$ *ändere die komplexe Mannigfaltigkeit* G *im Punkt* $P_0 \in G$, *falls* P_0 *zu* M^* *gehört, bzw. ändere* G *in* P_0 *nicht, falls* $P_0 \in E$ *ist.*

Für die Erzeugung der Modifikationen durch σ-Prozesse sind natürlich nur die Stellen von Bedeutung, in denen die Modifikation etwas ändert. Im nächsten Paragraphen werden einige Kriterien dafür aufgestellt, daß sich in einem Punkt bei analytischen Modifikationen nichts ändert. Zuvor sollen jedoch noch einige andere Sätze bewiesen werden.

Satz 5.8. Die Menge N^* bei analytischen Modifikationen.

Voraussetzung. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen. Im Punkt* Q_0 *sei die Abbildung* v *regulär und ändere die inverse Modifikation* $\mathfrak{M}^{-1}$ *die komplexe Mannigfaltigkeit* H. *Es sei* N^* *die Menge der Punkte aus* H, *in denen* $\mathfrak{M}^{-1}$ *die Mannigfaltigkeit* H *ändert.*

Behauptung. *In einer offenen Umgebung* V *von* Q_0 *ist* $N^* \cap V$ *eine rein* $(2n-2)$*-dimensionale analytische Menge und* v *regulär. Es ist*

$$Rg_{Q_1} v(Q, H) \begin{cases} = n & \text{für} \quad Q_1 \in V - N^*, \\ < n & \text{für} \quad Q_1 \in V \cap N^*. \end{cases} \tag{5.6}$$

Beweis. In einer offenen Umgebung V von Q_0 ist v auf $V \cap N$ regulär, also $v(Q, H)$ in V analytisch. Dann und nur dann gehört $Q_1 \in V$ zu N^*, wenn $v(Q, H)$ in Q_1 nicht pseudokonform ist, d.h., wenn $Rg_{Q_1} v(Q, H) < n$ ist. Man kann V außerdem so klein wählen, daß $v(V, H)$ in einer Karte U_α von G liegt mit $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$. Die Funktionen, die durch $\alpha^{-1} v(Q) = (f_1(Q), \ldots, f_n(Q))$ mit $Q \in V$ definiert werden, sind in V analytisch. Es ist[5])

$$N^* \cap V = \{Q \,|\, \partial f_1(Q) \ldots \partial f_n(Q) = 0\} \tag{5.7}$$

eine rein $(2n-2)$-dimensionale analytische Menge, w. z. b. w.

Bei analytischen Modifikationen ist N^* eine rein $(2n-2)$-dimensionale analytische Menge aus H oder leer.

Satz 5.9. Zusammengesetzte Modifikationen.

Voraussetzung. 1. *Zwei Modifikationen*

$$\mathfrak{M}_\nu = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G_\nu, A_\nu, M_\nu, \tau_\nu \\ H_\nu, B_\nu, N_\nu, v_\nu \end{pmatrix} \qquad (\nu = 1, 2) \tag{5.8}$$

seien gegeben. Eine pseudokonforme Abbildung γ *bilde* H_1 *so auf* G_2 *ab, daß gilt*

$$\gamma(H_1) = G_2, \qquad \gamma(B_1) \subseteqq A_2, \qquad \gamma(N_1) \supseteqq M_2. \tag{5.9}$$

2. *Setzt man* $B_3 = \tau_2 \gamma(B_1)$ *und* $N_3 = H_2 - B_1$, *so gebe es eine offene Umgebung von* N_3 *und in ihr eine* N_3 *umfassende analytische Menge, deren Dimension höchstens* $2n-2$ *betrage.*

Behauptung. 1. *Es ist*

$$\mathfrak{M}_3 = \underset{n}{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix} G_1, A_1, M_1, \tau_2\ \gamma\ \tau_1 \\ H_2, B_3, N_3, v_1\ \gamma^{-1}\ v_2 \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

eine Modifikation.

2. *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *offen, so ist auch* $\mathfrak{M}_3$ *offen.*

3. *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *beiderseits offen, so ist auch* $\mathfrak{M}_3$ *beiderseits offen.*

4. *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *meromorph und offen, so ist auch* $\mathfrak{M}_3$ *offen und meromorph.*

5. *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *meromorph und ist* $\mathfrak{M}_1$ *beiderseits offen, so ist auch* $\mathfrak{M}_3$ *meromorph.*

6. *Sind* $\mathfrak{M}_1$ *und* $\mathfrak{M}_2$ *analytisch, so ist auch* $\mathfrak{M}_3$ *analytisch.*

[5]) $\partial f_1 \ldots \partial f_n$ ist ein alternierendes Differential.

Anmerkung. *Die Voraussetzung 2 ist unnötig, d.h. von selbst erfüllt, wenn eine der folgenden Aussagen gilt:*

1. *Die Modifikation $\mathfrak{M}_2$ ist analytisch.*

2. *Es ist $\gamma(N_1) = M_2$.*

3. *Die Modifikation $\mathfrak{M}_2$ ist offen. Eine offene Umgebung U von N_1 und eine in U analytische Funktion f, die in keinem Teilgebiet von U identisch Null ist, existieren, so daß $f(P) = 0$ für $P \in N_1$ ist.*

4. *Es ist $n = 2$. Die Modifikation $\mathfrak{M}_2$ ist meromorph und offen. In H_2 gibt es eine N_2 umfassende analytische Menge N_2^*, deren Dimension höchstens 2 ist.*

Beweis. 1. Durch $\tau_2 \gamma \tau_1$ wird A_1 pseudokonform auf die offene Menge $\tau_2 \gamma \tau_1(A) = \tau_2 \gamma(B_1) = B_3$ abgebildet. Nach Definition 1.1 ist $\mathfrak{M}_3$ eine Modifikation. Dabei ist

$$\begin{cases} N_3 = H_2 - B_3 = (B_2 - B_3) \cup (N_2 - B_3) \\ \qquad\quad = \tau_2\big(A_2 - \gamma(B_1)\big) \cup N_2 \\ \qquad\quad = \tau_2\big(A_2 \cap \gamma(N_1)\big) \cup N_2. \end{cases} \tag{5.11}$$

2. *Die Modifikationen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ seien offen.* Ist U eine offene Umgebung von M_1, so ist $V_1 = \tau_1(U \cap A_1) \cup N_1$ offen. Wegen $M_2 \subseteq \gamma(N_1)$ ist $V_2 = \gamma(V_1)$ eine offene Umgebung von M_2, also ist $V_3 = \tau_2(V_2 \cap A_2) \cup N_2$ offen, wobei

$$\begin{cases} V_3 = \tau_2\big(\gamma(\tau_1(U \cap A_1) \cup N_1) \cap A_2\big) \cup N_2 \\ \quad = \tau_2 \gamma \tau_1(U \cap A_1) \cup \tau_2\big(A_2 \cap \gamma(N_1)\big) \cup N_2 \\ \quad = \tau_2 \gamma \tau_1(U \cap A_1) \cup N_3 \end{cases} \tag{5.12}$$

ist. Also ist die Modifikation $\mathfrak{M}_3$ offen.

3. *Die Modifikationen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ seien beiderseits offen.* Gemäß 2 ist $\mathfrak{M}_3$ offen. Ist eine Folge $P^\nu \in A_1$ gegeben, die gegen einen Punkt $P_0 \in M_1$ strebt, so gibt es eine gleichbezeichnete Teilfolge, so daß $\tau_1(P^\nu) \to Q_0 \in N_1$ für $\nu \to \infty$ strebt, da $\mathfrak{M}_1^{-1}$ offen ist. Es strebt $\gamma \tau_1(P^\nu) \to R_0 = \gamma(Q_0)$ für $\nu \to \infty$. Ist $R_0 \in A_2$, so strebt $\tau_2 \gamma \tau_1(P^\nu) \to \tau_2(R_0)$ für $\nu \to \infty$. Ist $R_0 \in N_2$, so gibt es eine gleichbezeichnete Teilfolge, so daß $\tau_2 \gamma \tau_1(P^\nu) \to S_0 \in N_2$ für $\nu \to \infty$ strebt, da $\mathfrak{M}_2^{-1}$ offen ist. Die Modifikation $\mathfrak{M}_3^{-1}$ ist offen; also ist $\mathfrak{M}_3$ beiderseits offen.

4. *Die Modifikationen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ seien offen und meromorph.* Dann ist $\mathfrak{M}_3$ offen. Eine komplexe Kurve $L \subseteq G_1$ mit $L \cap M = \overline{L} \cap M = \{P_0\}$ sei gegeben. Ist $\Sigma_{\tau_2 \gamma \tau_1}(P_0, L)$ leer, so streut die Abbildung $\tau_2 \gamma \tau_1$ längs L in P_0 nicht. Ist $Q_0 \in \Sigma_{\tau_2 \gamma \tau_1}(P_0, L)$, so gibt es eine Folge $P^\nu \in L \cap A_1$, so daß $Q^\nu = \tau_2 \gamma \tau_1(P^\nu) \to Q_0$ und $P^\nu \to P_0$ für $\nu \to \infty$ streben. Da $\mathfrak{M}_2$ offen ist, strebt für eine gleichbezeichnete Teilfolge

$$\gamma \tau_1(P^\nu) \to R_0 \in \big(\gamma(N_1) \cap A_2\big) \cup M_2 = \gamma(N_1) \tag{5.13}$$

also

$$\tau_1(P^\nu) \to S_0 = \gamma^{-1}(R_0) \in N_1 \tag{5.14}$$

für $\nu \to \infty$. Also ist $S_0 \in \Sigma_{\tau_1}(P_0, L)$. Da die Modifikation $\mathfrak{M}_1$ meromorph ist, verhält sich die Abbildung τ_1 längs L in P_0 bestimmt. Gemäß Satz 3.6 wird

L durch $\tau_1(P, L)$ konform auf die komplexe Kurve $L_1 = \tau(L, L)$ abgebildet, für die $\overline{L}_1 \cap N_1 = L_1 \cap N_1 = \{S_0\}$ ist. In G_2 ist $\gamma(L_1) = L_2$ eine komplexe Kurve. Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Es ist $R_0 \in A_2$. Dann strebt $\tau_2 \gamma \tau_1(P) \to \tau_2(R_0) = Q_0$ für $P \to P_0$ mit $P \in L \cap A_1$. Die Abbildung $\tau_2 \gamma \tau_1$ verhält sich längs L in P_0 bestimmt.

b) Es ist $R_0 \in M_2$. Dann ist

$$R_0 \in L_2 \cap M_2 \subseteqq \gamma_2(L_1 \cap N_1) = \{\gamma(S_0)\} = \{R_0\}, \tag{5.15}$$

$$R_0 \in \overline{L}_2 \cap M_2 \subseteqq \gamma_2(\overline{L}_1 \cap N_1) = \{\gamma(S_0)\} = \{R_0\}. \tag{5.16}$$

Also ist $M_2 \cap \overline{L}_2 = M_2 \cap L_2 = \{R_0\}$. Da die Modifikation $\mathfrak{M}_2$ meromorph ist, streut die Abbildung τ_2 längs $L_2 = \gamma \tau_1(L, L)$ in R_0 nicht. Daher streut auch die Abbildung $\tau_2 \gamma \tau_1$ längs L in P_0 nicht.

Insgesamt folgt, daß die Modifikation $\mathfrak{M}_3$ meromorph ist.

5. *Die Modifikationen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ seien meromorph und die Modifikation $\mathfrak{M}_1$ sei beiderseits offen.* Eine komplexe Kurve $L \subseteqq G_1$ mit $\overline{L} \cap M_1 = L \cap M_1 = \{P_0\}$ sei gegeben. Da $\mathfrak{M}_1$ [1] offen ist und die Abbildung τ_1 in P_0 längs L nicht streut, verhält sich τ_1 längs L in P_0 bestimmt. Wie in 4. folgt, daß die Modifikation $\mathfrak{M}_3$ meromorph ist.

6. *Die Modifikationen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ seien analytisch.* Durch $\vartheta_\nu(Q) = v_\nu(Q, H_\nu)$ wird v_ν auf H_ν analytisch fortgesetzt ($\nu = 1, 2$). Durch $\vartheta_1 \gamma \vartheta_2$ wird $v_1 \gamma v_2$ analytisch auf H_2 fortgesetzt, also ist die Modifikation $\mathfrak{M}_3$ analytisch.

Beweis zu Anmerkung 1. *Die Modifikation $\mathfrak{M}_2$ sei analytisch.* Durch $\vartheta_2(Q) = v_2(Q, H_2)$ wird v_2 analytisch auf H_2 fortgesetzt. Es gibt eine offene Umgebung V_1 von N_1 in H_1, die eine in V_1 analytische Menge $N_1^* \supseteqq N_1$ enthält, deren Dimension höchstens $2n-2$ ist. In der offenen Umgebung $U_2 = \gamma(V_1)$ von $\gamma(N_1) \supseteqq M_2$ ist $M_2^* = \gamma(N_1^*)$ analytisch mit $\dim M_2^* \leqq 2n-2$. In M_2^* ist M_2 enthalten. In $V_2 = \vartheta_2^{-1}(U_2)$ ist $N_2^* = \vartheta_2^{-1}(M_2^*)$ analytisch. Für $Q \in V_2 \cap B_2$ ist $\dim_Q N_2^* \leqq 2n-2$, also enthält N_2^* keinen inneren Punkt. Es ist $\dim N_2^* \leqq 2n-2$. Es gilt

$$\begin{cases} V_2 \supseteqq N_2^* = \vartheta_2^{-1}(M_2^*) = \tau_2(M_2^* \cap A_2) \cup \vartheta_2^{-1}(M_2) \\ \qquad\qquad = \tau_2\big(\gamma(N_1^*) \cap A_2\big) \cup N_2 \\ \qquad\qquad \supseteqq \tau_2\big(\gamma(N_1) \cap A_2\big) \cup N_2 = N_3. \end{cases} \tag{5.17}$$

Daher ist die Voraussetzung 2 von Satz 5.8 erfüllt, w. z. b. w.

Beweis zu Anmerkung 2. Ist $\gamma(N_1) = M_2$, so gilt

$$N_3 = \tau_2\big(\gamma(N_1) \cap A_2\big) \cup N_2 = \tau(M_2 \cap A_2) \cup N_2 = N_2. \tag{5.18}$$

Weil $\mathfrak{M}_2$ eine Modifikation ist, so ist Voraussetzung 2 von Satz 5.9 erfüllt, w. z. b. w.

Beweis zu Anmerkung 3. Unter den Voraussetzungen von Anmerkung 3 ist die Funktion $g(P) = f\big(\gamma^{-1}(P)\big)$ auf der offenen Umgebung $V = \gamma(U)$ von $\gamma(N_1) \supseteqq M_2$ analytisch, in keinem Teilgebiet von V identisch Null und

verschwindet auf $\gamma(N_1)$. Nach Satz 2.10 ist die Funktion $g(v_2(Q))$, die in der offenen Menge $\tau_2(V \cap A_2)$ analytisch ist, zu einer Funktion h in die offene Umgebung $W = \tau_2(V \cap A_2) \cup N_2$ von N_2 analytisch fortsetzbar. Für $Q \in \tau_2(A_2 \cap \gamma(N_1))$ ist $v_2(Q) \in \gamma(N_1)$ und $h(Q) = g(v_2(Q)) = 0$. Zu $Q \in N_2$ gibt es eine gegen Q konvergierende Folge $Q^\nu \in B_2 \cap W = \tau_2(V \cap A_2)$. Für eine gleichbezeichnete Teilfolge strebt $v_2(Q^\nu) \to P \in M_2 \subseteq \gamma(N_1)$ für $\nu \to \infty$, wobei $v_2(Q^\nu) \in V \cap A_2$ ist. Also gilt

$$h(Q) = \lim_{\nu \to \infty} h(Q^\nu) = \lim_{\nu \to \infty} g(v_2(Q^\nu)) = g(P) = 0. \tag{5.19}$$

Die in W analytische Menge $N_3^* = \{Q \mid h(Q) = 0\}$ enthält $N_2 \cup \tau_2(A \cap \gamma(N_1)) = N_3$, wobei $\dim N_3^* \leq 2n-2$ ist, w. z. b. w.

Beweis zu Anmerkung 4. *Es sei $n = 2$. Die Modifikation $\mathfrak{M}_2$ sei offen und meromorph. In H_2 gebe es eine N_2 umfassende analytische Menge N_2^*, deren Dimension höchstens 2 ist.*

In einer offenen Umgebung V_1 von N_1 gibt es eine analytische Menge $N_1^* \supseteq N_1$ mit $\dim N_1^* \leq 2$. Es ist $M_2^* = \gamma(N_1^*)$ eine $\gamma(N_1)$ umfassende analytische Menge in der offenen Umgebung $U_2 = \gamma(V_1)$ von M_2, wobei $\dim M_2^* \leq 2$ ist. In $\tau_2(U_2 \cap A_2)$ ist $\tau_2(M_2^* \cap A_2)$ analytisch, hat höchstens die Dimension 2 und verhält sich nach Satz 4.3 in der offenen Menge $V_2 = \tau_2(U_2 \cap A_2) \cup N_2$ regulär. Also ist $L_2 = \overline{\tau_2(M_2^* \cap A_2)} \cup V_2$ eine analytische Menge aus V_2, deren Dimension höchstens 2 ist. In V_2 ist $L_2 \cup (N_2^* \cap V_2) = N_3^*$ analytisch mit $\dim N_3^* \leq 2$. Es ist

$$N_3^* = L_2 \cup (N_2^* \cap V_2) \supseteq \tau_2(M_2^* \cap A_2) \cup N_2 \supseteq \tau_2(\gamma(N_1) \cap A_2) \cup N_2 = N_3. \tag{5.20}$$

Die Voraussetzung 2 von Satz 5.9 ist erfüllt, w. z. b. w.

Satz 5.10. Identische Modifikationen.

Dann und nur dann ändern die Modifikationen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^{-1}$ die Mannigfaltigkeiten G und H nicht, wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^{-1}$ analytisch sind.

Beweis. Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^{-1}$ analytisch, so werden die Bezeichnungen von Satz 5.7 eingeführt. Es ist $B_0 = H$ und $G = A_0$. Es gilt

$$\tau_0(G - E) = \tau(A_0 - E) \cap B_0 = \emptyset. \tag{5.21}$$

Daher ist $G = E$ und ebenso $H = \underline{E}$. Die Umkehrung ist trivial, w. z. b. w.

§ 6. Identitätssätze.

In diesem Paragraphen sollen einige Kriterien dafür aufgestellt werden, daß die betrachtete Modifikation in einem gegebenen Punkt nichts ändert; solche Kriterien mögen Identitätssätze heißen.

Satz 6.1. Identitätssatz I.

Voraussetzung. 1. *Die Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ sei offen. Im Punkt $Q_0 \in N$ sei v regulär.*

2. *Durch den Punkt $P_0 \in M$ gehen n komplexe Kurven L_ν, für die $M \cap \overline{L}_\nu = M \cap L_\nu = \{P_0\}$ gelte.*

3. *Der Punkt P_0 sei ein gewöhnlicher Punkt von L_ν und die Tangentialvektoren an L_ν im Punkt P_0 seien linear unabhängig.*

4. *Es sei* $Q_0 \in \bigcap_{\nu=1}^{n} \Sigma(P_0, L_\nu)$.

Behauptung. *Die Modifikation $\mathfrak{M}$ ändert in P_0 die Mannigfaltigkeit G nicht.*

Beweis[6]). Gemäß Satz 5.6 und Satz 3.6 verhält sich τ in P_0 längs L_ν bestimmt und bildet $\tau(P, L_\nu)$ die Kurve L_ν konform auf die Kurve $\tilde{L}_\nu = \tau(L_\nu, L_\nu)$ ab, wobei $Q_0 = \tau(P, L_\nu)$ ein gewöhnlicher Punkt von $\tilde{L}_\nu$ ist. Es ist $\tilde{\tilde{L}}_\nu \cap N = \tilde{L}_\nu \cap N = \{Q_0\}$.

Es wird eine ortsuniformisierende Abbildung $\alpha(\mathfrak{z}) \in \mathfrak{P}(G)$ mit $P_0 \in U_\alpha$ gewählt. Außerdem gibt es eine ortsuniformisierende Abbildung $\beta(\mathfrak{w}) \in \mathfrak{P}(H)$ mit $Q_0 \in V_\beta$ und $U'_\beta = \{\mathfrak{w} \mid |\mathfrak{w}_1| < 1\}$, wobei $\beta(0) = Q_0$ sei. Man kann β so wählen, daß V_β durch $v(Q, H)$ analytisch in U_α abgebildet wird und $\beta^{-1}(L_\nu \cap V_\beta)$ eine Parameterdarstellung $\mathfrak{w}_\nu(x)$ hat, wobei x ein Gebiet durchläuft, das den Nullpunkt enthält, und wobei $\mathfrak{w}_\nu(0) = 0$ ist. Durch $\mathfrak{z}(\mathfrak{w}) = \alpha^{-1} v(\beta(\mathfrak{w}), H)$ wird U'_β analytisch in U'_α abgebildet, durch $\mathfrak{z}(\mathfrak{w}_\nu(x))$ wird eine Umgebung des Nullpunktes der x-Ebene konform in die komplexe Kurve $\alpha^{-1}(L_\nu \cap U_\alpha)$ abgebildet, wobei $\mathfrak{z}(\mathfrak{w}_\nu(0)) = \alpha^{-1}(P_0)$ ist. Daher ist

$$\mathfrak{t}_\nu = \frac{d}{dx}\,\mathfrak{z}(\mathfrak{w}_\nu(x))\Big|_{x=0} = \sum_{\mu=1}^{n} \mathfrak{z}_{w_\mu}(0)\, w'_{\mu\nu}(0) \neq 0 \tag{6.1}$$

ein Tangentialvektor an $\alpha^{-1}(L_\nu \cap U_\alpha)$ in $\alpha^{-1}(P_0)$. Die Vektoren $\mathfrak{t}_\nu$ sind nach Voraussetzung linear unabhängig. Also ist $\frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(w_1, \ldots, w_n)}^{\mathfrak{w}\ 0} \neq 0$. Die Abbildung v hat in Q_0 den Rang n. In der Bezeichnungsweise von Satz 5.7 ist $Q_0 \in \underline{E}$, also $P_0 = v(Q_0, H) \in E$, w. z. b. w.

Zur Vorbereitung auf einen anderen Identitätssatz dient

Satz 6.2. Rang der Abbildung v.

Voraussetzung. 1. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen.*

2. *Die Abbildung v sei in allen Punkten einer offenen Umgebung V von $Q_0 \in N$ regulär. Es gebe eine offene Umgebung U von $P_0 = v(Q_0, H)$, die eine analytische Menge S der Dimension $2p$ enthält, wobei $S \supseteq v(V \cap N, H)$ ist. Es sei $0 \leq p < n$.*

3. *Mit $r(Q_1)$ werde der Rang der Abbildung $v(Q, H)$ in $Q_1 \in V$ bezeichnet.*

Behauptung. *Für jeden Punkt $Q_1 \in V$ ist entweder $r(Q_1) = n$ oder $0 \leq r(Q_1) \leq p+1$, wobei „oder" von Q_1 abhängen kann.*

Beweis. Es sei $Q_1 \in N \cap V$ und $r(Q_1) < n$. In V liegt ein Gebiet V_1, das Q_1 enthält und für das $N_0 = \{Q \mid r(Q) < n\}$ eine rein $(2n-2)$-dimensionale analytische Menge aus V_1 ist. Es liegt $N'_0 = v(N_0, H)$ in einer analytischen Menge S_1 aus U mit $\dim S_1 \leq 2p_1$, wobei $p_1 \leq p$ minimal gewählt sei. Die

[6]) Die Beweismethode stammt von H. Hopf. Man vgl. den Beweis des Lemmas in H. Hopf [9a] § 3, Nr. 1.

Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von S_1 ist analytisch und hat eine Dimension kleiner als $2p_1$, also ist N_0' nicht in ihr enthalten. Es gibt einen gewöhnlichen Punkt $P_2 \in N_0' \cap S_1$ von S_1 mit $\dim_{P_2} S_1 = p_1$ und einen Punkt $Q_2 \in N_0$ mit $P_2 = v(Q_2, H)$.

Es werde $n - p_1 = q$ gesetzt. Eine ortsuniformisierende Abbildung $\alpha \in \mathfrak{P}(G)$ kann so gewählt werden, daß gilt:

1. Durch α wird $U_\alpha' = \{\mathfrak{z} \mid |z_1| < 1, \ldots, |z_n| < 1\}$ pseudokonform auf $U_\alpha \subseteq U$ abgebildet. Dabei ist $\alpha(0) = P_2$.

2. Es ist $\alpha^{-1}(S_1 \cap U_\alpha) = \{\mathfrak{z} \mid z_1 = z_2 = \cdots = z_q = 0\} \cap U_\alpha'$. Eine ortsuniformisierende Abbildung $\beta \in \mathfrak{P}(H)$ kann so gewählt werden, daß gilt:

3. Durch β wird $U_\beta' = \{\mathfrak{w} \mid |w_1| < 1, \ldots, |w_n| < 1\}$ pseudokonform auf $U_\beta \subseteq V_1$ abgebildet. Dabei ist $\beta(0) = Q_2$.

4. Es ist $v(U_\beta, H) \subseteq U_\alpha$ und $v(U_\beta \cap N_0, H) \subseteq S_1 \cap U_\alpha$.

Die Abbildung $\alpha^{-1} v(Q, H)$ ist analytisch auf U_β also werden durch $\alpha^{-1} v(Q, H) = \big(f_1(Q), \ldots, f_n(Q)\big)$ analytische Funktionen f_ν auf U_β definiert. Es ist

$$N_0 \cap U_\beta = \{Q \mid \partial f_1(Q)\, \partial f_2(Q) \ldots \partial f_n(Q) = 0\}. \tag{6.2}$$

Die Funktionen $h_\nu(\mathfrak{w}) = f_\nu\big(\beta(\mathfrak{w})\big)$ sind in U_β' analytisch. Ihre Funktionalmatrix hat in Q_2 den Rang $r = r(Q_2) < n$. Also kann man die Gleichungen $h_\nu(\mathfrak{w}) = z_\nu$ nach r der Veränderlichen z_ν auflösen. (Für $r = 0$ ist die Behauptung $r < p + 1$ trivial).

Es gibt also ein Gebiet W' im $\mathfrak{x}$-Raum, eine pseudokonforme Abbildung $\mathfrak{w}(\mathfrak{x})$ von W' auf $W \subseteq U_\beta$, wobei $\mathfrak{w}(0) = 0$ mit $0 \in W'$ gilt, und Nummern $\nu_1, \ldots, \nu_r$ mit

$$h_{\nu_\varrho}\big(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})\big) \equiv x_\varrho \quad \text{für} \quad \varrho = 1, \ldots, r \quad \text{und} \quad \mathfrak{x} \in W'. \tag{6.3}$$

Es ist $N_0^* = \beta^{-1}(N_0 \cap U_\beta)$ eine rein $(2n-2)$-dimensionale analytische Menge aus U_β', die den Nullpunkt enthält. Daher ist $\widetilde{N}_0 = \mathfrak{w}^{-1}(N_0^* \cap W)$ eine rein $(2n-2)$-dimensionale analytische Menge aus W', die den Nullpunkt enthält. Ist $\mathfrak{x} \in \widetilde{N}_0$, so ist $\mathfrak{w}(\mathfrak{x}) \in N_0^* \cap W$, so ist $v\big(\beta(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})), H\big) \in S_1 \cap U_\alpha$, so ist

$$\alpha^{-1} v\big(\beta(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})), H\big) \quad \big(f_1\big(\beta(\mathfrak{w}(\mathfrak{x}))\big), \ldots, f_n\big(\beta(\mathfrak{w}(\mathfrak{x}))\big)\big) \in \alpha^{-1}(S_1 \cap U_\alpha) \tag{6.4}$$

also

$$h_\nu\big(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})\big) = f_\nu\big(\beta(\mathfrak{w}(\mathfrak{x}))\big) = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, q \quad \text{und} \quad \mathfrak{x} \in \widetilde{N}_0. \tag{6.5}$$

Angenommen es gibt zwei verschiedene Zahlen λ und ϱ mit $\nu_\lambda \leq q$ und $\nu_\varrho \leq q$, so wäre

$$\begin{cases} \widetilde{N}_0 \subseteq \bigcap_{\nu=1}^{q} \{\mathfrak{x} \mid h_1\big(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})\big) = \cdots = h_q\big(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})\big) = 0\} \subseteq \\ \quad \subseteq \{\mathfrak{x} \mid h_{\nu_\varrho}\big(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})\big) = h_{\nu_\lambda}\big(\mathfrak{w}(\mathfrak{x})\big) = 0\} = \{\mathfrak{x} \mid x_\lambda = x_\varrho = 0\}. \end{cases} \tag{6.6}$$

Da aber $\widetilde{N}_0$ die reine Dimension $2n-2$ hat, ist das falsch. Zwischen den Zahlen $q+1$ und n je einschließlich liegen also mindestens $r-1$ verschiedene Zahlen (von $\nu_1, \ldots, \nu_r$); es ist $n - q \geq r - 1$, was $p \geq p_1 \geq r(Q_2) - 1$ oder $p + 1 \geq r(Q_2)$ besagt.

Die Umgebung V_1 konnte beliebig klein gewählt werden. Daher ist $\lim_{Q \to Q_1} r(Q) \leq p+1$. Da der Rang $r(Q)$ in einer Umgebung von Q_1 mit dem Rang einer Funktionalmatrix übereinstimmt, ist $r(Q_1) \leq \lim_{Q \to Q_1} r(Q) \leq p+1$; w. z. b. w.

Besteht insbesondere M nur aus einem Punkt oder aus isolierten Punkten, so kann der Rang der Abbildung $v(Q, H)$ bei einer analytischen Modifikation nur die Werte 0, 1 und n annehmen, was erst für $n > 2$ etwas Neues aussagt. Nun erhält man:

Satz 6.3. Identitätssatz II.

Voraussetzung. 1. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen.*

2. *Die Abbildung v sei in allen Punkten einer offenen Umgebung V von $Q_0 \in N$ regulär. Es gebe eine offene Umgebung U von $P_0 = v(Q_0, H)$, die eine analytische Menge S der Dimension $2p$ enthält, wobei $S \supseteq v(V \cap N, H)$ gelte. Es sei $0 \leq p < n-1$.*

3. *Durch den Punkt $P_0 \in M$ gehen k komplexe Kurven L_ν, für die $M \cap L_\nu = M \cap \overline{L}_\nu = \{P_0\}$ gelte. Es sei $p+2 \leq k \leq n$.*

4. *Der Punkt P_0 sei ein gewöhnlicher Punkt von L_ν und die Tangentialvektoren an L_ν in P_0 seien linear unabhängig.*

5. *Es sei* $Q_0 \in \bigcap_{\nu=1}^{n} \Sigma(P_0, L_\nu)$.

Behauptung. *Die Modifikation ändert in P_0 die Mannigfaltigkeit G nicht.*

Der Beweis beginnt genau so wie in Satz 6.1, nur durchläuft der Index ν jetzt die Werte $\nu = 1, \ldots, k$ statt $\nu = 1, \ldots, n$. Außerdem kann man $V_\beta \subseteq V$ und $U_\alpha \subseteq U$ wählen. Für $\nu = 1, \ldots, k$ erhält man wieder die Gl. (6.1). Die Vektoren $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_k$ sind linear unabhängig, also hat die Funktionalmatrix $\left(\delta_{w_\mu}(0)\right)$ einen Rang nicht kleiner als k. Ihr Rang ist aber der Rang $r(Q_0)$ von $v(Q, H)$ im Punkt Q_0. Daher ist $r(Q_0) \geq k > p+1$, woraus mit Satz 6.2 sich $r(Q_0) = n$ ergibt. In der Bezeichnungsweise von Satz 5.7 ist $Q_0 \in \underline{E}$, also $P_0 = v(Q_0, H) \in E$, w. z. b. w.

Der II. Identitätssatz enthält nicht den ersten, da er für $p = n-1$ nicht anwendbar ist. Der II. Identitätssatz sagt erst etwas Neues für $0 \leq p < n-2$, also $n > 2$, aus. Als Spezialfall ergibt sich für Modifikationen in einem Punkt:

Satz 6.4. Identitätssatz von Hopf[7]).

Voraussetzung. 1. *Die Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n \begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ *sei offen.*

2. *Die Menge M bestehe aus dem Punkt P_0.*

3. *Durch P_0 gehen die komplexen Kurven L_1 und L_2, die beide P_0 als gewöhnliche Punkte enthalten.*

4. *Die Tangentialvektoren an L_1 und L_2 in P_0 seien verschieden (gerichtet).*

5. *Es sei* $Q_0 \in \Sigma(P_0, L_1) \cap \Sigma(P_0, L_2)$.

[7]) Im Falle $n = 2$ ist Satz 6.4 eine Folge des ersten Identitätssatzes. Er wurde von H. Hopf allgemeiner für „schlichte" Abbildungen (im Falle $n = 2$) bewiesen. Man vgl. H. Hopf [9a] § 3, Nr. 1.

Behauptung. 1. *Die Modifikation $\mathfrak{M}$ ist analytisch und N besteht aus dem Punkt Q_0 allein.*

2. *Durch*

$$\tau(P, G) = \begin{cases} \tau(P) & \text{für} \quad P \neq P_0, \quad P \in G, \\ Q_0 & \text{für} \quad P = P_0 \end{cases} \tag{6.7}$$

wird G pseudokonform auf H abgebildet.

Beweis. Da $\Sigma_v(N)$ aus dem Punkt P_0 besteht, streut die Abbildung v in keinem Punkt von N. Sie ist nach Satz 2.9 in N regulär. Die Modifikation ist analytisch. Mit $p = 0$ sind die Voraussetzungen von Satz 6.2 erfüllt, also bildet $\tau(P, G)$ die Mannigfaltigkeit G pseudokonform in H ab. Ist $Q_1 \in N$, so ist $v(Q_1, H) = P_0$, weshalb N nur aus dem Punkt Q_0 besteht, w. z. b. w.

Ändert also die Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\binom{G, A, M, \tau}{H, B, N, v}$ im Punkt P_0 die Mannigfaltigkeit G, so besagt Satz 6.3 bzw. Satz 6.1 im Falle $n = 2$, daß jedem „Linienelement" L in P_0 *eineindeutig* ein oder kein Punkt aus H zugeordnet ist. Darauf baut sich im Falle $n = 2$ im wesentlichen die Erzeugung analytischer Modifikationen durch σ-Prozesse auf. *Leider* gelten die Identitätssätze bereits für $n = 2$ bei meromorphen Modifikationen nicht mehr, wie man leicht durch Beispiele belegt[8]). Dies erschwert die Erzeugung meromorpher Modifikationen durch σ-Prozesse außerordentlich. In der nächsten Arbeit werden Eigenschaften meromorpher Modifikationen bewiesen, mit denen sich diese Schwierigkeiten überwinden lassen.

---

[8]) Beispielsweise seien G und H komplex-projektive Räume mit den homogenen Koordinaten $z_0 : z_1 : z_2$ bzw. $w_0 : w_1 : w_2$. Es seien

$$M = \{(z_0 : z_1 : z_2) \mid z_1 z_2 = 0\}, \qquad A = G - M,$$
$$N = \{(w_0 : w_1 : w_2) \mid w_1 w_2 = 0\}, \qquad B = H - N,$$
$$\tau(z_0 : z_1 : z_2) = (z_1 z_0 : z_1 z_2 : z_2^2),$$
$$v(w_0 : w_1 : w_2) = (w_2 w_0 : w_1^2 : w_1 w_2).$$

Dadurch wird eine beiderseits offene und meromorphe Modifikation gegeben. Aber jede komplexe Gerade

$$L_m = \{(z_0 : z_1 : z_2) \mid z_2 = m z_1\} \quad \text{mit} \quad m \neq 0$$

durch $(1:0:0)$ geht als ganzes in dieselbe Gerade aus H über:

$$L_m^* = \{(w_0 : w_1 : w_2) \mid w_2 = m w_1\}.$$

Also gilt Satz 6.4 nicht für beiderseits offene und meromorphe Modifikationen.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 17. November 1954.)

Salzmann, H.
Math. Zeitschr. Bd. 61, S. 489—494 (1955)

Über den Zusammenhang in topologischen projektiven Ebenen.

Von
Helmut Salzmann.

1. Definitionen. Eine projektive Ebene besteht aus einer Menge P von Punkten p und einer Menge $\mathfrak{G}$ von ausgezeichneten Punktmengen G, den Geraden, so daß je zwei Punkte $p \neq q$ in einer eindeutig bestimmten Verbindungsgeraden $p \cup q$ enthalten sind und je zwei Geraden $G \neq H$ genau einen Schnittpunkt $G \cap H$ haben. Außerdem wird die Existenz von vier Punkten vorausgesetzt, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Eine solche Ebene heiße *topologisch*, wenn in der Menge der Punkte sowohl wie in der Menge der Geraden je eine Topologie gegeben ist [bestimmt durch das System der Filter $\mathfrak{V}(p)$ von Umgebungen V des Punktes p bzw. das System der Filter $\Sigma(G)$ von Umgebungen $\mathfrak{S}$ der Geraden G], bezüglich deren die Abbildung der Menge der Paare verschiedener Punkte auf ihre Verbindungsgeraden und ebenso die Abbildung der Menge der Paare verschiedener Geraden auf ihre Schnittpunkte stetige Operationen sind. Die gröbste Topologie, bei der als einzige Umgebung die Menge P aller Punkte bzw. die Menge $\mathfrak{G}$ aller Geraden auftritt, soll dabei ausgeschlossen werden[1]). Damit eine Zweideutigkeit in der Bezeichnung vermieden wird, bedeute für zwei Mengen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ von Geraden der Ausdruck $\mathfrak{A} \dot{\cap} \mathfrak{B}$ die Menge aller Schnittpunkte $A \cap B$ mit $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ und $A \neq B$; dual dazu wird $A \dot{\cup} B$ für Punktmengen A, B verwendet.

2. Grundtatsachen. Aus der Definition der topologischen Ebene folgt insbesondere die Stetigkeit jeder Perspektivität zwischen Punktreihe und Geradenbüschel (im Sinne der Zuordnung der Punkte einer Geraden, dem „Träger der Punktreihe", zu ihren Verbindungsgeraden mit einem nicht auf der Geraden liegenden Punkt, dem „Träger des Geradenbüschels"). Daher ist jede Projektivität zwischen zwei Geraden, als Hintereinanderausführung von Perspektivitäten, ein Homöomorphismus der von der Topologie der Punktmenge in den Geraden induzierten Topologien, die kurz als *lineare Topologien* bezeichnet seien.

Im Raum der Punkte einer topologischen Ebene (und dual dazu auch im Raum der Geraden) *gilt das* Frechetsche *Trennungsaxiom* T_1, welches besagt, daß jeder Punkt eine Umgebung hat, die einen beliebigen anderen Punkt nicht enthält. Später läßt sich hieraus noch eine schärfere Trennungseigenschaft

[1]) Die verwendeten topologischen Begriffe findet man in [1], [2], Filter insbesondere in [2], die T_i-Terminologie in [1].

folgern. Der Beweis für T_1 ergibt sich aus der dreifachen Transitivität der Gruppe aller Projektivitäten einer Geraden auf sich[2]) in folgender Weise: Nach Voraussetzung gibt es zu einem geeigneten Punkt p eine Umgebung, die wenigstens einen anderen Punkt q nicht enthält. Das Paar p, q läßt sich durch eine Projektivität in jedes Paar verschiedener Punkte der Geraden $p \cup q$ überführen, also gibt es zu jedem solchen Paar eine Umgebung des einen Punktes, die den anderen nicht enthält. Das ist die Eigenschaft T_1 für die lineare Topologie der Geraden $p \cup q$ und wegen der Homöomorphie aller Geraden gilt T_1 für alle linearen Topologien. Aber nur ein T_1-Raum kann in einem ihn überdeckenden System von Unterräumen (hier den Geraden) lauter T_1-Topologien induzieren.

In einer topologischen Ebene ist die Topologie im Raum der Geraden in folgender Weise durch die Topologie im Raum der Punkte bestimmt: *Sind p_1, p_2 zwei verschiedene Punkte auf der Geraden G und p ein Punkt außerhalb G, so wird der Umgebungsfilter $\Sigma(G)$ erstens erzeugt von allen $V_1 \dot\cup V_2$ mit $V_i \in \mathfrak{U}(p_i)$ und zweitens ebenso von allen $U_1 \dot\cup U_2$ mit $U_i = V_i \cap (p_i \cup p)$, $V_i \in \mathfrak{U}(p_i)$.* Einerseits ist es nämlich unmittelbarer Ausdruck der Stetigkeit der Bildung der Verbindungsgeraden, daß jedes $\mathfrak{S}$ in $\Sigma(G)$ ein $V_1 \dot\cup V_2$ und damit auch ein $U_1 \dot\cup U_2$ enthält, andererseits ergibt die Stetigkeit der Bildung des Schnittpunktes zu einem gegebenen V_i, das p nicht enthält, eine Umgebung $\mathfrak{S}_i$ von G, so daß für alle $S \in \mathfrak{S}_i$ gilt $(p_i \cup p) \cap S \in V_i$, also $U_i \cap S \neq \emptyset$. Daher ist wegen $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ jede Gerade S aus $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$ in $U_1 \dot\cup U_2$ enthalten. Das heißt aber $U_1 \dot\cup U_2$ und erst recht $V_1 \dot\cup V_2 \in \Sigma(G)$. Diese Beziehung zwischen Punkt- und Geradentopologie läßt sich natürlich auch dualisieren.

Nun kann man zeigen: *Jede Gerade ist eine abgeschlossene Teilmenge des Punktraumes.* Ist nämlich p ein Punkt außerhalb der Geraden G und $q \in G$, so gibt es eine Umgebung der Geraden $p \cup q$ von der Form $V \dot\cup W$ mit $V \in \mathfrak{U}(p)$, $W \in \mathfrak{U}(q)$, $q \notin V$, die G nicht enthält; hätten jetzt V und G einen gemeinsamen Punkt r, so läge $G = r \cup q$ entgegen der Konstruktion doch in $V \dot\cup W$, daher kann V die Gerade G nicht treffen und die Komplementärmenge der Geraden ist offen.

Aus dem angegebenen Zusammenhang zwischen Punkt- und Geradentopologie zusammen mit der Homogenität der Geraden und der Homöomorphie aller Geraden untereinander läßt sich erkennen, daß die Topologie einer topologischen Ebene schon durch den Umgebungsfilter eines Punktes in der linearen Topologie einer Geraden durch ihn bestimmt ist. Es ist eine offene Frage, welchen Bedingungen dieser Umgebungsfilter genügen muß, damit er von einer Topologie der Ebene induziert werden kann.

3. Koordinaten und affine Ebene. Wählt man in einer projektiven Ebene zwei Punkte u_1 und u_2 und läßt ihre Verbindungsgerade und jeden

[2]) Diese dreifache Transitivität ergibt sich leicht durch Hintereinanderausführung von höchstens drei geeignet gewählten Perspektivitäten, sie ist bewiesen in [6], S. 59 und in [5]. Hier wird nur die zweifache Transitivität benutzt, an späterer Stelle jedoch auch die dreifache.

ihrer Punkte aus der Ebene fort, so erhält man eine affine Ebene, deren Geraden als „affine Geraden" bezeichnet werden. Affine Geraden, die zusammenfallen oder keinen Punkt gemeinsam haben, heißen *parallel*. Nach Wahl eines Punktes 0 lassen sich die Punkte p der affinen Ebene in der üblichen Weise durch

$$p = (p_1 \cup u_2) \cap (p_2 \cup u_1), \qquad p_i \in A_i = (0 \cup u_i) - \{u_i\}$$

den Paaren (p_1, p_2) von Punkten p_i auf den Achsen A_i umkehrbar eindeutig zuordnen; die affine Ebene erscheint also als mengentheoretisches Produkt zweier ihrer Geraden. Liegt nun die affine Ebene in einer topologischen projektiven Ebene, so läßt sich sogar sagen: *Die affine Ebene ist topologisches Produkt zweier ihrer Geraden*, d.h. der Umgebungsfilter eines Punktes (p_1, p_2) wird erzeugt durch die $U_1 \times U_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in U_i\}$, wobei die U_i Umgebungen von p_i in der linearen Topologie von A_i sind. Nach der Dualisierung der zweiten Form der Kennzeichnung des Zusammenhanges zwischen Punkt- und Geradentopologie erhält man nämlich eine Basis von $\mathfrak{V}((p_1, p_2))$ in der Gestalt aller $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$, wobei $\mathfrak{S}_1$ die Einschränkung einer Umgebung von $p_1 \cup u_2$ auf das Geradenbüschel mit dem Träger u_2, also von der Form $U_1 \cup \{u_2\}$ ist und das Entsprechende bei Vertauschung der Indizes für $\mathfrak{S}_2$ gilt. Auf Grund der Zuordnung der Punktepaare zu den Punkten ist aber $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = U_1 \times U_2$.

Die Darstellung der affinenen Ebene wird nach Wahl eines Punktes e, der auf keiner der beiden Achsen liegt, zu einer Koordinatendarstellung, indem man den durch (p_1, p_2) bestimmten Punkt p kennzeichnet durch das Paar (x_p, y_p) von Elementen

$$x_p = \big(((p_1 \cup u_2) \cap (0 \cup e)) \cup u_1\big) \cap A_2, \qquad y_p = p_2$$

der Menge D der Punkte der affinen Geraden A_2. Bezeichnet man y_e durch 1 und erklärt man $\tau(s, x, t)$ als dasjenige Element y von D, für das der Punkt (x, y) auf der Parallelen durch $(0, t)$ zu der Geraden $(0, 0) \cup (1, s)$ liegt, so wird D mit der dadurch erklärten ternären Verknüpfung τ zu einer als *Ternärkörper* bezeichneten algebraischen Struktur, von deren Eigenschaften hier nur gebraucht wird, daß sie mit der durch $x + y = \tau(1, x, y)$ gegebenen Addition eine Loop mit dem neutralen Element 0 bildet.

Eine additive Koordinatenloop in der linearen Topologie einer topologischen Ebene ist eine topologische Loop in dem Sinne, daß die Addition und ihre beiden Umkehrungen stetige Funktionen sind. Das ergibt sich unmittelbar daraus, daß sich in der Beziehung $x + y = z$ jede der drei Größen aus den beiden anderen und den Punkten $0, e, u_1, u_2$ durch die stetigen Operationen des Verbindens und Schneidens ausdrücken läßt; so ist etwa, wenn man noch $u = (0 \cup e) \cap (u_1 \cup u_2)$ setzt,

$$y = \big(([((x \cup u_1) \cap (0 \cup u)) \cup u_2] \cap [z \cup u_1]) \cup u\big) \cap (0 \cup u_2).$$

In einer topologischen Loop folgt aus dem Trennungsaxiom T_1 sogar die Regularität (T_3). Beweis: Zu einer Umgebung U von 0 gibt es wegen der

Stetigkeit eine Umgebung V von 0 mit $V+V \subseteq U$. Für einen Punkt x ist die Menge der w mit $v+w=x$ für ein $v \in V$ eine Umgebung von x, die also, falls x zu der abgeschlossenen Hülle $\overline{V}$ von V gehört, einen Punkt aus V enthält, woraus $x \in V+V$ und daher $\overline{V} \subseteq U$ folgt. Wegen der Homogenität der linearen Topologie enthält also jede Umgebung die abgeschlossene Hülle einer anderen, wie behauptet. Anwendung der früheren Sätze liefert daraus sofort: *In einer topologischen Ebene sind Punkt- und Geradentopologie regulär.*

4. Zusammenhang. Eine topologische Ebene heißt *zusammenhängend*, wenn sie nicht als Summe[3]) zweier echter abgeschlossener Teilmengen dargestellt werden kann, oder, was dasselbe heißt, wenn die leere Menge und die ganze Ebene die einzigen gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Punktmengen sind. Will man etwa im Fall einer zusammenhängenden desarguesschen Ebene (wo der Ternärkörper ein Schiefkörper ist) Sätze über zusammenhängende topologische Schiefkörper anwenden, so erhebt sich die Frage, ob auch die affine Ebene zusammenhängt. Sie soll im folgenden behandelt werden.

Aus der erwähnten dreifachen Transitivität der Gruppe der Projektivitäten einer Geraden folgt die Transitivität der Gruppe $\Pi_D(x)$ der den Punkt x festlassenden Projektivitäten der affinen Geraden D auf der Menge der von x verschiedenen Punkte von D. Hieraus ergeben sich nun zunächst für das Zusammenhangsverhalten der affinen Geraden genau zwei Möglichkeiten: Sie ist entweder zusammenhängend oder *nirgends zusammenhängend*[4]), worunter verstanden wird, daß der die zusammenhängende Komponente eines Punktes x enthaltende Durchschnitt aller gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Umgebungen von x, die sog. *Quasikomponente*[4]) von x, auf diesen einen Punkt zusammenschrumpft; denn dieser Durchschnitt ist invariant unter $\Pi_D(x)$ und enthält daher zugleich mit einem weiteren Punkt auch die ganze Gerade D. Die beiden Eigenschaften, zusammenhängend oder nirgends zusammenhängend zu sein, kommen gleichzeitig der affinen Geraden und der zum topologischen Produkt der affinen Geraden mit sich selbst homöomorphen affinen Ebene zu.

Aus dem Zusammenhang der affinen Geraden folgt derjenige der projektiven Geraden, dieser ist gleichwertig mit dem der punktierten Ebene und aus diesem folgt derjenige der ganzen Ebene; denn einmal erzeugt eine Zerlegung der projektiven Geraden in zwei abgeschlossene Teilmengen eine ebensolche der affinen Geraden, zum anderen können in der punktierten Ebene je zwei Punkte über einen dritten durch einen zusammenhängenden Zug aus zwei Geraden verbunden werden, während umgekehrt die punktierte Ebene durch Projektion aus dem herausgenommenen Punkt auf eine nicht durch ihn gehende projektive Gerade abgebildet werden kann, die als stetige Funktion den Zusammenhang erhält; schließlich induziert auch die Zerlegung der projektiven Ebene in zwei abgeschlossene Teilmengen eine solche der punktierten Ebene.

---

[3]) Summe ist hier gemeint als Vereinigung disjunkter Teilmengen.

[4]) Diese Bezeichnungen sind gewählt in Anlehnung an [4], S. 79—96.

Der hohe Grad von Homogenität in einer topologischen Ebene läßt vermuten, daß die in allgemeinen Räumen mögliche Erscheinung, daß eine zusammenhängende Punktmenge durch Herausnahme eines einzigen Punktes in lauter einzelne Punkte zerfällt[5]), in einer Ebene nicht vorkommen kann. In der Tat hat der Zusammenhang der projektiven Geraden den der affinen Geraden zur Folge. Der Beweis hierfür ergibt sich so: Wegen der Homogenität der projektiven Geraden G kann man die affine Gerade aus dieser durch Herausnahme eines beliebigen Punktes z entstanden denken. Angenommen, die affine Gerade sei nicht zusammenhängend; da sich dann alle ihre Quasikomponenten auf einzelne Punkte reduzieren, gibt es zu zwei Punkten x, y eine offene Umgebung O von x, die y nicht enthält und in $G-\{z\}$ gleichzeitig offen und abgeschlossen ist, deren Rand in G also höchstens aus dem Punkt z besteht. Die Betrachtung der affinen Geraden $G-\{y\}$ lehrt ebenso die Existenz einer offenen Umgebung Q von x, die z nicht enthält und deren Rand höchstens aus dem Punkt y besteht. Jetzt ist $O \cap Q$ eine von G verschiedene offene Umgebung von x, deren Rand in

$$(O+\{z\}) \cap (Q+\{y\}) - (O \cap Q)$$

enthalten und damit leer ist, so daß also auch die projektive Gerade nicht zusammenhängt.

Weiter gilt der Satz: *Alle Geraden einer zusammenhängenden projektiven Ebene sind zusammenhängend.* Der Beweis erfolgt wieder indirekt: Sei G eine nicht zusammenhängende Gerade, p ein nicht auf ihr gelegener Punkt und σ die (stetige) Projektion der punktierten Ebene $P-\{p\}$ aus p auf G. Für $x \in G$ ist $\sigma^{-1}x = (x \cup p) - \{p\}$. Der Durchschnitt K aller in $P-\{p\}$ offenen und abgeschlossenen Mengen, die $\sigma^{-1}x$ umfassen, ist, da ja σ^{-1} offene Mengen in offene und abgeschlossene in abgeschlossene überführt, enthalten im Durchschnitt der Urbilder $\sigma^{-1}S$ aller x enthaltenden in G offenen und abgeschlossenen Mengen S und dies ist nichts anderes als das Urbild des Durchschnittes aller dieser S, also der Quasikomponente von x in G, die nach Voraussetzung aus dem Punkt x allein besteht, d.h. $K \subseteq \sigma^{-1}x$. Andererseits ist die Quasikomponente von x in $P-\{p\}$ enthalten in K. Für einen Punkt $q \notin x \cup p$ findet man nun (ebenso wie beim vorigen Beweis) eine in P offene Umgebung O von x, die q nicht enthält und höchstens den Randpunkt p haben kann. Vertauschen von p und q führt zu einer entsprechenden Umgebung Q von x. Nun ist wieder $O \cap Q$ eine von P verschiedene nicht leere randlose offene Menge und damit P nicht zusammenhängend.

Schließlich ergibt sich, daß auch die projektive Gerade, die punktierte und die projektive Ebene nur zusammenhängend oder nirgends zusammenhängend sein können. Für die projektive Gerade folgt das unmittelbar aus der mehrfachen Transitivität der Gruppe der Projektivitäten. Ist die projektive Ebene nicht zusammenhängend, so findet man nach dem vorangegangenen Beweis in ihr und daher auch in der punktierten Ebene zu einem

[5]) Für ein Beispiel s. [3], [4], S. 85.

Punkt x eine offene und abgeschlossene Umgebung, die einen beliebigen anderen Punkt nicht enthält. Daher besteht die Quasikomponente von x aus dem Punkt x allein.

Zusammenfassend hat man das Ergebnis, daß in einer topologischen projektiven Ebene die affinen Geraden, die projektiven Geraden, die affine Ebene, die punktierte Ebene und die ganze Ebene selbst entweder alle zusammenhängend oder alle nirgends zusammenhängend sind.

Literatur.

[1] ALEXANDROFF-HOPF: Topologie I. Berlin 1935. — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale I. Paris 1940. — [3] KNASTER-KURATOWSKI: Sur les ensembles connexes. Fundamenta Math. **2**, 206—255 (1921). — [4] KURATOWSKI, C.: Topologie II. Warschau 1950. — [5] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Erscheint 1955. — [6] VEBLEN-YOUNG: Projective Geometry I. New York 1910.

Zusatz bei der Korrektur. Die Ergebnisse dieser Arbeit überschneiden sich teilweise mit denen von L. A. SKORNIAKOV, Trudy Moskov. Mat. Obsc. **3**, 347—373 (1954), die dem Verfasser während der Korrektur durch ein Referat bekannt wurden.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 13. Dezember 1954.)

MAY CIRCULATE

Physikalisches Wörterbuch

Herausgegeben von **Wilhelm H. Westphal**, Berlin. Zwei Teile in einem Band. Mit etwa 10500 Stichwörtern und 1595 Textfiguren. VI, 833 und 795 Seiten 4°. 1952. Halbfranz DM 148.—

Aus den Besprechungen:

Die zweite Auflage des physikalischen Handwörterbuches von A. Berliner und K. Scheel erschien vor fast 20 Jahren. Die stürmische Entwicklung der Physik machte ein neues Werk dieser Art dringend erforderlich. Es mag ja kühn erscheinen, die ungeheure Stofffülle in Form eines Wörterbuches zusammenfassen zu wollen. Es ist aber dem Herausgeber und seinen Mitarbeitern gelungen, diese schwierige Aufgabe in hervorragender Weise zu lösen. Es ist ihnen gelungen, ein Werk zu schaffen, welches in aller Kürze, aber doch in verständlicher Weise, über jede physikalische Frage Auskunft gibt. Gegenüber dem früheren Handwörterbuch wurden die Gesetze der physikalischen Chemie und Astrophysik voll, die der Geophysik und Biophysik in gewissem Umfange berücksichtigt. Weiter wurde ein kurzer Abriß der Geschichte der Physik sowie eine Seite der Lebensdaten von 875 Physikern hinzugefügt. Dagegen wurde die angewandte Physik nur soweit berücksichtigt, insofern sie für die Grundlagenforschung von Bedeutung ist. Aus der Mathematik wurde, nach dem Vorwort des Herausgebers, alles das aufgenommen, was der Physiker für seine Arbeit ständig braucht ...

Die Ausstattung des Buches ist, wie man es von dem Verlag gewohnt ist, ausgezeichnet. Dieses Buch benötigt keine Empfehlung, es empfiehlt sich selbst. Für jeden Naturwissenschaftler und naturwissenschaftlich interessierten Mathematiker ist dieses Werk unentbehrlich. „*Monatshefte für Mathematik*"

Zuverlässige Nachschlagewerke werden bei der ständigen Erweiterung der Physik immer unentbehrlicher. Es ist daher zu begrüßen, daß Westphal ein dem neuesten Stand der Forschung entsprechendes Werk geschaffen hat, das eine rasche Orientierung über Fragen aus allen Gebieten der Physik ermöglicht. Gegenüber dem vor 20 Jahren im gleichen Verlag erschienenen Handwörterbuch von Berliner und Scheel stellt das physikalische Wörterbuch ein völlig neues Werk dar, insbesondere durch Hinzunahme der physikalischen Chemie, Astrophysik sowie in gewissem Umfang der Bio- und Geophysik. Selbst die wichtigsten Kapitel aus der Mathematik fehlen nicht. 10500 Begriffe werden von 80 Bearbeitern, die als hervorragende Sachkenner ihrer Gebiete bekannt sind, erläutert. Zahlreiche gute Abbildungen (darunter die von Röntgens Jagdgewehr unter dem Stichwort Werkstoffprüfung) erhöhen die Anschaulichkeit. Eine weise Beschränkung auf das eigentliche Erkenntnisgut unter weitgehendem Verzicht auf rein technische Anwendungen kommt dem Werk nur zu statten, da es dadurch noch als ein Doppelband herausgebracht werden konnte. Der Anhang enthält einen Abriß der Geschichte der Physik, Lebensdaten von 800 bedeutenden Physikern, Tabellen mit wichtigen Konstanten und Umrechnungsfaktoren und einen Nachtrag der während des Druckes eingegangenen Ergänzungen. Das ausgezeichnete Werk wird sicher mit Beifall aufgenommen werden. In erster Linie wendet es sich an den Physiker, der sich über ihm weniger geläufige Gebiete informieren will, wobei die vielen Literaturhinweise sehr nützlich sind. Selbstverständlich ist das Buch auch Wissenschaftlern der Nachbargebiete zu empfehlen. Wer sich beispielsweise über den *dynamischen* Photoelektronenvervielfacher, Isotopentrennung, Wasserstofflampe, V-Teilchen oder sonstige physikalische Begriffe unterrichten will, wird gerne zum Handwörterbuch der Physik greifen, das von den Ausbildungsgesetzen bis zur Zylinderwelt Antwort auf ungezählte Fragen gibt. „*Zeitschrift für angewandte Physik*"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

FILED IN STACKS

Materie als Feld

Eine Einführung von Dr. phil. **Friedrich Hund**, o. Professor an der Universität Frankfurt a. M. Mit 40 Abbildungen. VIII, 418 Seiten Gr.-8°.

DM 48.—; Ganzleinen DM 52.—

Inhaltsübersicht: **Grundlagen:** Wirkungsquantum. Lichtteilchen und Materiewellen. Feldtheorie der Materie. — **I. Elektromagnetisches Feld als Vorbild:** Maxwellsche Theorie. Elektromagnetische Wellen. Lokalisierung von Energie und Impuls. Kräfte. Invarianzeigenschaften. Vierervektoren und Tensoren. Viererschreibweise der Maxwellschen Theorie. Variationsprinzip. Lagrange-Funktion und potentielle Energie. — **II. Vorrelativistisches anschauliches Wellenbild der Materie:** Materiewellen. Wellengleichung. Einfache Wellengruppen. Elektrisch geladene Materie. Reflexion und Brechung. Tunneleffekt. Eigenschwingungen in Potentialmulden. „Übergreifen" der Wellenfunktion. Streuung von Materiewellen. Variationsprinzip. Kräfte des Materiefeldes. Chemische Kraft. — **III. Relativistisches anschauliches Feldbild der Materie:** De-Broglie-Wellen. Wellengleichung. Energie- und Impulsdichte. Elektrisch geladene Materie. Materie im elektromagnetischen Feld. Variationsprinzip. Langsam bewegte Materie. Energie-Impuls-Tensor. Kräfte des Materiefeldes. Kernkraft. Materieerzeugung im elektrischen Feld. — **IV. Einteilchensystem:** Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen. Analyse eines Feldes. Wahrscheinlichkeitsdeutung. Mehrere ungekoppelte Teilchen. Fermi- und Bose-Statistik. Relativistisches Einteilchensystem. — **V. Quantentheorie der Mechanismen:** Gesichtspunkte. Komplementarität und Vertauschungsregeln. Schrödinger-Gleichung. Anderer Ausgangspunkt. Zwei Arten harmonischer Oszillatoren. Harmonischer Oszillator mit komplexen Variablen. Kanonische Variable in der klassischen Mechanik. Die Zeit neben den Ortskoordinaten. Vertauschungsregeln für kanonische Variable. Allgemeine Quantentheorie. Übergang zum Schrödinger-Schema. — **VI. Feldquantelung:** Gesichtspunkte. Vertauschungsregeln und Eigenwerte. Ladung als ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung. Kräftefreier Fall. Einfache Übungsaufgabe zur Wellenquantelung. Materieerzeugung. Teilchenzahlen. Feld als Mechanismus. Rechnen mit Entwicklungskoeffizienten. Äquivalenz des gequantelten Feldbildes mit dem gequantelten Teilchenbild (— Quantelung). Feldquantelung bei Fermi-Statistik. Lorentzinvariante Vertauschungsregel. — **VII. Materie mit Spin 1:** Spin. Richtungseigenschaften bei Spin 1 und 2. Vektorielle Materiewelle im sonst feldfreien Raum. Einfluß eines elektromagnetischen Feldes. Magnetisches Verhalten des Spins. Energie-Impuls-Tensor. Spinanteil des Drehimpulses. Quantelung.— **VIII. Materie mit Spin 1/2:** Spin 1/2. Nichtrelativistische Näherung. Spinorentransformation im relativistischen Fall. Spinoranalysis. Diracsche Gleichung. Ebene Wellen. Einfluß eines elektromagnetischen Feldes. Elektromagnetisches Verhalten des Spins. Kleinsches Paradoxon. Löchertheorie und Materieerzeugung. Vierkomponentige Spinoren. Dirac-Gleichungen mit allgemeinen α- und γ-Operatoren. Besondere α- und γ-Matrizen. Die aus den γ_μ und α^μ gebildeten Tensoren. Energie-Impuls-Tensor. Drehimpuls. Der vom Spin herrührende Anteil von Ladung und Strom. Variationsprinzip. Quantelung. — **IX. Allgemeine Feldtheorie:** Allgemeine anschauliche Feldtheorie. Lorentz-Invarianz. Symmetrisierung des kanonischen Tensors. Energie-Impuls-Tensor. Drehimpuls. Phaseninvarianz. Eichinvarianz. Beispiele. Quantelung. — **X. Verknüpfung von Materiearten:** Übersicht. Bekannte Kopplung: Materie und elektromagnetisches Feld. Felder mit Potentialen. Paarerzeugung im Potential hoher Frequenz. Zeitproportionale Übergangswahrscheinlichkeiten. Felder mit Quellen. Kräfte zwischen den Trägern von Quellen. Kopplungstypen dritten Grades (Yukawa-Kopplung). Kopplung vierten Grades (Fermi-Kopplung). Zusammenhalt von Materie. Kernkräfte. Spinabhängige Kernkräfte. — **XI. Elementarteilchen:** Teilchenaspekt. Neue Elementarteilchen. Reaktionen und Kopplungen. Störungsrechnung für Umwandlungen. Störungsrechnung mit Feldquantelung. Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren. Beispiele. Zerfall von Elementarteilchen. Indirekte Kopplungen. Streuvorgänge. — **Literatur. Sachverzeichnis.**

MAY CIRCULATE

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.